

PERBANDINGAN SISTEM GENTZEN DENGAN SISTEM LEMMON PADA PEMBUKTIAN VALIDITAS ARGUMEN

THE COMPARISON OF GENTZEN SYSTEMS AND LEMMON SYSTEM ON ARGUMENT VALIDITY EVIDENCE

Djoni Dwijono

Program Studi Sistem Informasi, Fakultas Teknologi Informasi
Universitas Kristen Duta Wacana - Yogyakarta
djonid@staff.ukdw.ac.id

Abstrak

Membuktikan validitas suatu argumen dengan logika formal yang dinamakan deduksi alami, dapat dilakukan dengan berbagai sistem yang dikembangkan oleh ahli-ahli logika. Dari berbagai sistem, Sistem Gentzen adalah sistem deduksi alami yang pertama kali dikembangkan dan kemudian diikuti dengan berbagai sistem lainnya, misalnya Sistem Lemmon. Sistem Gentzen dengan Sistem Lemmon dapat dikatakan mirip satu sama lain. Makalah ini akan membandingkan Sistem Gentzen dengan Sistem Lemmon dengan langkah-langkah verifikasi untuk membuktikan validitas argumen melalui aturan-aturan inferensi yang digunakan pada kedua sistem tersebut. Dari bukti-bukti yang diperoleh, maka dapat diambil kesimpulan bahwa kedua sistem tersebut sama. Teknik Tabel digunakan untuk menjelaskan langkah demi langkah pembuktian validitas argumen dengan kedua sistem tersebut.

Kata kunci: Validitas Argumen, Deduksi Alami, Sistem Gentzen, Sistem Lemmon, Teknik Tabel

Abstract

Proving the validity of an argument with formal logic known as natural deduction can be done with various systems developed by logicians. Of the various systems, Gentzen System is a natural deduction system first developed and then followed by various other systems, e.g. Lemmon System. Gentzen system with Lemmon system seem to be similar to each other. This paper will do a comparison between Gentzen system and Lemmon system with verification measures through rules of inference used on both systems. From the evidence obtained, it can be concluded that the two systems are the same. Table Technique was used to clarify in a step-by-step way the validity of proving arguments on both systems.

Keywords: *Argument Validity, Natural Deduction, Gentzen System, Lemmon System, Table Technique*

Tanggal Terima Naskah : 06 Januari 2016
Tanggal Persetujuan Naskah : 07 September 2016

1. PENDAHULUAN

Pada logika formal di ranah pembahasan tentang logika proposisional (*propositional logic*), dikenal berbagai teknik yang digunakan untuk membuktikan validitas dari suatu ekspresi logika yang berasal dari suatu argumen. Salah satu teknik tersebut diberi nama umum deduksi alami (*natural deduction*).

Berbagai macam teknik yang tergolong deduksi alami tersebut, sudah banyak dikembangkan oleh para ahli logika sejak awal abad XX Masehi, antara lain Sistem Gentzen yang dikembangkan oleh Gerhard Gentzen, Sistem Hilbert yang dikembangkan oleh David Hilbert, Sistem Lemmon yang dikembangkan oleh E.J Lemmon, Sistem *L* yang dikembangkan oleh Jan Lukasiewicz, dan berbagai sistem lainnya. Berbagai sistem deduksi alami tersebut masing-masing memiliki ciri tersendiri dan masing-masing sistem berbeda dengan sistem lainnya.

Pada penelitian ini akan dibandingkan antara dua sistem tersebut yang tergolong deduksi alami, yakni Sistem Lemmon dengan Sistem Gentzen untuk membuktikan validitas suatu argumen. Kedua sistem ini dipilih karena secara penulisan aturan-aturan inferen, yakni aturan yang digunakan untuk membenarkan langkah deduksi, tampak hampir sama dan dengan fungsi yang sama pula.

Berdasarkan pemakaian aturan-aturan inferen ini, maka kedua sistem akan dibandingkan dengan menggunakan parameter pembanding berupa jumlah langkah deduksi yang digunakan dan aturan-aturan inferen yang digunakan untuk membuktikan validitas suatu argumen yang sudah berbentuk ekspresi logika. Hasil perbandingan tersebut akan membuktikan apakah kedua sistem tersebut memiliki lebih banyak persamaannya dibandingkan dengan perbedaannya pada saat digunakan untuk membuktikan validitas suatu argumen atau deduksi.

2. ATURAN-ATURAN INFEREN PADA SISTEM LEMMON DAN SISTEM GENTZEN

Berikut ini akan diperlihatkan aturan-aturan inferen dari kedua sistem tersebut, dimulai dari Sistem Lemmon, kemudian Sistem Gentzen. Penulisan aturan-aturan inferen tersebut menggunakan teknik yang disebut Teknik Tabel (*Table Technique*).

Aturan inferen dari Sistem Lemmon tercantum berikut ini [1]:

Tabel 1. Aturan inferen dari Sistem Lemmon

No	Nama	Dari	Diperoleh	Singkatan
1	<i>Double Negation</i>	$\Gamma \vdash \neg\neg A$	$\Gamma \vdash A$	DN
2	<i>Double Negation</i>	$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash \neg\neg A$	DN
3	<i>Modus Ponens</i>	$\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash A \rightarrow C$	$\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C$	MP
4	<i>Modus Tollens</i>	$\Gamma_1 \vdash A \rightarrow B, \Gamma_2 \vdash \neg B$	$\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash \neg A$	MT
5	\wedge <i>Introduction</i>	$\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash B$	$\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B$	\wedge I
6	\wedge <i>Elimination</i>	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\Gamma \vdash A$	\wedge E
7	\wedge <i>Elimination</i>	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\Gamma \vdash B$	\wedge E
8	\vee <i>Introduction</i>	$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash A \vee B$	\vee I
9	\vee <i>Introduction</i>	$\Gamma \vdash B$	$\Gamma \vdash A \vee B$	\vee I
10	\vee <i>Elimination</i>	$\Gamma_1 \vdash A \vee B, \Gamma_2, A \vdash C, \Gamma_3, B \vdash C$	$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash C$	\vee E
11	<i>Conditional Proof</i>	$\Gamma, A \vdash B$	$\Gamma \vdash A \rightarrow B$	CP
12	<i>Reductio Ad Absurdum</i>	$\Gamma, A \vdash \perp$	$\Gamma \vdash \neg A$	RAA

Aturan-aturan inferen dari Sistem Gentzen [2] tercantum berikut ini, hanya saja aturan-aturan inferen ini di dalam buku aslinya ditulis dengan Teknik Garis Horisontal

(*Horizontal Bar Technique*), tetapi di dalam penulisan makalah ini sudah diubah menjadi berbentuk Teknik Tabel, dan terlihat sebagai berikut:

Tabel 2. Aturan inferen dari Sistem Gentzen

No	Nama	Dari	Diperoleh	Nama Lain
1	$\wedge I$ (\wedge Introduction)	$\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash B$	$\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash A \wedge B$	---
2	$\wedge E$ (\wedge Elimination)	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\Gamma \vdash A$	---
3	$\wedge E$ (\wedge Elimination)	$\Gamma \vdash A \wedge B$	$\Gamma \vdash B$	---
4	$\vee I$ (\vee Introduction)	$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash A \vee B$	---
5	$\vee I$ (\vee Introduction)	$\Gamma \vdash B$	$\Gamma \vdash A \vee B$	---
6	$\vee E$ (\vee Elimination)	$\Gamma_1 \vdash A \vee B, \Gamma_2, A \vdash C, \Gamma_3, B \vdash C$	$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 \vdash C$	---
7	$\rightarrow I$ (\rightarrow Introduction)	$\Gamma, A \vdash B$	$\Gamma \vdash A \rightarrow B$	Conditional Proof
8	$\rightarrow E$ (\rightarrow Elimination)	$\Gamma_1 \vdash A, \Gamma_2 \vdash A \rightarrow C$	$\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash C$	Modus Ponens
9	\perp	$\Gamma \vdash \perp$	$\Gamma \vdash C$	Falsum
10	<i>Reductio Ad Absurdum</i>	$\Gamma, A \vdash \perp$	$\Gamma \vdash \neg A$	RAA
11	<i>Identity</i>	$\Gamma \vdash A$	$\Gamma \vdash A$	Id

Sistem Lemmon memiliki 12 aturan inferen sedangkan Sistem Gentzen memiliki 11 aturan inferen. Sistem Lemmon tidak memiliki dua aturan inferen dari Sistem Gentzen, yakni aturan \perp (*Falsum*) dan aturan Id (*Identity*), sedangkan Sistem Gentzen tidak memiliki aturan *Double Negation* (DN) dan *Modus Tollens* (MT) yang ada pada Sistem Lemmon. Namun, kedua sistem dapat digunakan untuk membuktikan aturan inferen yang tidak ada pada masing-masing sistem [3].

Dari sedikit perbedaan ini, sebenarnya sudah dapat dikatakan bahwa kedua sistem tersebut memiliki kesamaan pada banyak aturan-aturan inferennya, tetapi berikut ini akan dibuktikan peranan masing-masing aturan inferen tersebut pada pembuktian validitas suatu argumen [4].

3. PEMBUKTIAN VALIDITAS ARGUMEN DENGAN KEDUA SISTEM

Berikut ini akan disajikan lima contoh argumen atau ekspresi logika yang akan dibandingkan langkah-langkah pembuktiannya atau deduksinya dengan menggunakan Sistem Lemmon dan Sistem Gentzen [5]. Deduksi tersebut ditunjukkan dengan menggunakan Teknik Tabel. Teknik Tabel menggunakan tabel pembuktian dan pada tabel tersebut, terdapat lima kolom yang tercantum, kolom-1 diberi nama Asumsi, menunjukkan proses deduksi, kolom 2 berisi nomor urut deduksi, kolom 3 diberi nama wff (*well formed formulae*) yang berisi sebagian ekspresi-ekspresi logika yang digunakan, kolom 4 adalah Aturan yang isinya aturan-aturan yang digunakan, sedangkan kolom 5 adalah Ref. (Referensi) yang berisi bantuan untuk mempermudah terlihatnya nomor deduksi diambil dari nomor urut keberapa dari kolom ke 2.

Contoh-1:

Buktikan: $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), A, \neg C\} \vdash \neg B$

Bukti:

a. Sistem Lemmon

Tabel 3. Pembuktian $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), A, \neg C\} \vdash \neg B$ dengan Sistem Lemmon

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Diberi	--
2	(2)	A	Diberi	--
3	(3)	$\neg C$	Diberi	--
1,2	(4)	$B \rightarrow C$	MP	1,2
1,2,3	(5)	$\neg B$	MT	4,5

b. Sistem Gentzen

Tabel 4. Pembuktian $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), A, \neg C\} \vdash \neg B$ dengan Sistem Gentzen

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Diberi	--
2	(2)	A	Diberi	--
3	(3)	$\neg C$	Diberi	--
1,2	(4)	$B \rightarrow C$	$\rightarrow E$	1,2
1,2,3	(5)	$\neg B$	MT	4,5

Kedua sistem masing-masing memiliki lima langkah penyelesaian, tetapi Sistem Gentzen tidak memiliki aturan inferen MT. MT dalam Sistem Gentzen harus dibuktikan dahulu validitasnya, kemudian dapat digunakan untuk pembuktian. Tambahan-tambahan aturan untuk pembuktian tersebut diberi istilah aksioma (*axiom*).

Pembuktian MT sebagai salah satu aksioma dengan menggunakan Sistem Gentzen dapat dilihat berikut ini:

Tabel 5. Pembuktian MT dengan Sistem Gentzen

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	A	Asumsi	--
2	(2)	$A \rightarrow B$	Diberi	--
3	(3)	$\neg B$	Diberi	--
1,2	(4)	B	$\rightarrow E$	1,2
1,2,3	(4)	\perp	---	3,4
2,3	(5)	$\neg A$	RAA	1,4

Untuk membuktikan MT tersebut sebagai aksioma, sebenarnya masih memerlukan pembuktian $B \wedge \neg B \equiv F$ (*False*) atau Falsum. Tetapi dari Tabel Kebenaran (*Truth Table*) dapat dilihat jika $T \wedge F \equiv F$.

Contoh-2:

Buktikan: $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$

Bukti:

a. Sistem Lemmon

Tabel 6. Pembuktian $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ dengan Sistem Lemmon

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Diberi	--
2	(2)	B	Asumsi	--
3	(3)	A	Asumsi	--
1,3	(4)	$B \rightarrow C$	MP	1,3
1,2,3	(5)	C	MP	2,4
1,2	(6)	$A \rightarrow C$	CP	3,5
1	(7)	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	CP	2,6

b. Sistem Gentzen

Tabel 7. Pembuktian $\{A \rightarrow (B \rightarrow C)\} \vdash B \rightarrow (A \rightarrow C)$ dengan Sistem Gentzen

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Diberi	--
2	(2)	B	Asumsi	--
3	(3)	A	Asumsi	--
1,3	(4)	$B \rightarrow C$	$\rightarrow E$	1,3
1,2,3	(5)	C	$\rightarrow E$	2,4
1,2	(6)	$A \rightarrow C$	$\rightarrow I$	3,5
1	(7)	$B \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow I$	2,6

Kedua sistem ternyata memiliki tujuh langkah yang sama. Tidak ada perbedaan yang berarti pada kedua sistem, kecuali nama aturan inferennya.

Contoh-3:

Buktikan: $\{B \rightarrow C\} \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow C)$

Bukti:

a. Sistem Lemmon

Tabel 8. Pembuktian $\{B \rightarrow C\} \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow C)$ dengan Sistem Lemmon

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$B \rightarrow C$	Diberi	--
2	(2)	$\neg B \rightarrow \neg A$	Asumsi	--
3	(3)	A	Asumsi	--
2,3	(4)	$\neg \neg B$	MT	2,3
2,3	(5)	B	DN	4
1,2,3	(6)	C	$\rightarrow E$	1,5
1,2	(7)	$A \rightarrow C$	$\rightarrow I$	3,6
1	(8)	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow I$	2,7

b. Sistem Gentzen

Tabel 9. Pembuktian $\{B \rightarrow C\} \vdash (\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow C)$ dengan Sistem Gentzen

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$B \rightarrow C$	Diberi	--
2	(2)	$\neg B \rightarrow \neg A$	Asumsi	--
3	(3)	A	Asumsi	--
2,3	(4)	$\neg \neg B$	MT	2,3
2,3	(5)	B	DN	4
1,2,3	(6)	C	$\rightarrow E$	1,5
1,2	(7)	$A \rightarrow C$	$\rightarrow I$	3,6
1	(8)	$(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow I$	2,7

Ternyata kedua sistem juga memiliki jumlah langkah yang sama, yakni delapan langkah. Perbedaan hanya pada Sistem Gentzen tidak memiliki aturan inferen DN. Aturan inferen DN dalam Sistem Gentzen harus dibuktikan dahulu, sebelum dapat digunakan untuk pembuktian, sedangkan aturan inferen MT sudah digunakan pada contoh-1.

Contoh-4:

Buktikan: $\{A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow \neg B\} \vdash \neg(A \wedge B)$

Bukti:

a. Sistem Lemmon

Tabel 10. Pembuktian $\{A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow \neg B\} \vdash \neg(A \wedge B)$ dengan Sistem Lemmon

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$A \rightarrow C$	Diberi	--
2	(2)	$C \rightarrow D$	Diberi	--
3	(3)	$D \rightarrow \neg B$	Diberi	--
4	(4)	$A \wedge B$	Asumsi	--
4	(5)	A	$\wedge E$	4
1,4	(6)	C	MP	1,5
1,2,4	(7)	D	MP	2,6
1,2,3,4	(8)	$\neg B$	MP	3,7
4	(9)	B	$\wedge E$	4
1,2,3,4	(10)	\perp	---	7,9
1,2,3	(11)	$\neg(A \wedge B)$	RAA	4,10

b. Sistem Gentzen

Tabel 11. Pembuktian $\{A \rightarrow C, C \rightarrow D, D \rightarrow \neg B\} \vdash \neg(A \wedge B)$ dengan Sistem Gentzen

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	$A \rightarrow C$	Diberi	--
2	(2)	$C \rightarrow D$	Diberi	--
3	(3)	$D \rightarrow \neg B$	Diberi	--
4	(4)	$A \wedge B$	Asumsi	--
4	(5)	A	$\wedge E$	4
1,4	(6)	C	$\rightarrow E$	1,5
1,2,4	(7)	D	$\rightarrow E$	2,6
1,2,3,4	(8)	$\neg B$	$\rightarrow E$	3,7
4	(9)	B	$\wedge E$	4
1,2,3,4	(10)	\perp	---	7,9
1,2,3	(11)	$\neg(A \wedge B)$	RAA	4,10

Ternyata kedua sistem masih memiliki jumlah langkah yang sama, yakni 11 langkah, kekurangannya hanya pada kedua sistem tidak memiliki hasil Falsum yang diperoleh dari $\neg B \wedge B \equiv \text{False}$ atau Falsum. Jadi hasil $\neg B \wedge B \equiv \text{False}$ harus dibuktikan dan ditambahkan sebagai salah satu aksioma pada masing-masing sistem.

Contoh-5 berikut ini adalah suatu contoh yang tingkat kesulitannya cukup tinggi karena tak ada bantuan berupa asumsi pemberian. Seluruh pembuktian berasal dari asumsi yang harus ditentukan atau diasumsikan lebih dahulu.

Contoh-5:

Buktikan: $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$

Bukti:

a. Sistem Lemmon

Tabel 12. Pembuktian $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ dengan Sistem Lemmon

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	A	Asumsi	--
2	(2)	$A \rightarrow B$	Asumsi	--
3	(3)	$B \rightarrow C$	Asumsi	--
1,2	(4)	B	MP	1,2
1,2,3	(5)	C	MP	3,4
2,3	(6)	$A \rightarrow C$	CP	1,5
3	(7)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	CP	2,6
--	(8)	$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	CP	3,7

b. Sistem Gentzen

Tabel 12. Pembuktian $\vdash (B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$ dengan Sistem Gentzen

Asumsi	Nomor	Wff	Aturan	Ref.
1	(1)	A	Asumsi	--
2	(2)	$A \rightarrow B$	Asumsi	--
3	(3)	$B \rightarrow C$	Asumsi	--
1,2	(4)	B	$\rightarrow E$	1,2
1,2,3	(5)	C	$\rightarrow E$	3,4
2,3	(6)	$A \rightarrow C$	$\rightarrow I$	1,5
3	(7)	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow I$	2,6
--	(8)	$(B \rightarrow C) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$	$\rightarrow I$	3,7

Pada kolom asumsi terakhir terlihat kosong, dan hal ini menunjukkan bahwa semua asumsi tambahan berhasil digunakan seluruhnya untuk keduanya karena memang sisi kiri ekspresi harus kembali pada posisi kosong. Dalam pengertian argumen, hanya ada kesimpulan, tidak ada premis-premis.

4. KESIMPULAN

Beberapa kesimpulan yang dapat diambil dari langkah-langkah pembuktian di atas, dapat diuraikan seperti berikut:

- Kedua sistem deduksi alami yang digunakan, yakni Sistem Lemmon dan Sistem Gentzen dapat disebut bahwa kedua sistem tersebut memiliki kemiripan yang sangat besar. Hal ini dibuktikan dengan langkah-langkah deduksi yang kebanyakan

berjumlah sama, sedangkan perbedaan hanya pada pemberian nama beberapa aturan inferennya.

- b. Jika kedua sistem memakai semua aturan inferen dan aksioma-aksioma yang tidak ada pada kedua sistem dan dapat dibuktikan dengan masing-masing sistem, maka Sistem Lemmon dan Sistem Gentzen adalah sistem deduksi alami yang identik.

REFERENSI

- [1]. Burke, Edmund., Foxley, Erick. 1996. *Logic and Its Application*. 1st Published. Europe: Prentice Hall.
- [2]. Kelly, John J. 1997. *The Essence of Logic*, 1st Published. Europe: Prentice Hall.
- [3]. Copi, Irving M., Cohen Carl. 2009. *Introduction to Logic*. 13th Edition New Jersey: Pearson Prentice Hall, Upper Saddle River.
- [4]. Hurley, Patrick J. 2006. *A Concise Introduction to Logic*. 9th Edition. Wadsworth: Thomson.
- [5]. Huth, Michael., Ryan, Mark. 2004. *Logic in Computer Science*. 2nd Edition. Cambridge University Press