Jurnal Teknik dan Ilmu Komputer

PEMECAHAN MASALAH OPTIMASI BERSIFAT PROBABILISTIK MENGGUNAKAN *CHANGE-CONSTRAINED PROGRAMMING*

(Solution of Probabilistically Optimization Problems Using Change-Constrained Programming)

Budi Marpaung

Fakultas Teknik dan Ilmu Komputer Jurusan Teknik Industri
Universitas Kristen Krida Wacana – Jakarta
budi.marpaung@ukrida.ac.id

Abstrak

Pemrograman Kendala yang Berubah merupakan model optimasi yang dikembangkan untuk memecahkan masalah yang bersifat probabilistik. Dalam dunia nyata, khususnya dalam dunia industri, koefisien kendala dan konstanta sisi kanan tidak dapat ditentukan dengan pasti. Dalam tulisan ini diuraikan mengenai penggunaan Pemrograman Kendala yang Berubah untuk mengoptimalkan keuntungan yang diperoleh perusahaan dalam membuat berbagai produk dengan menggunakan beberapa mesin yang memiliki kapasitas terbatas dan bersifat probabilistik. Terbukti bahwa Pemrograman Kendala yang Berubah dapat menentukan solusi optimalnya.

Kata Kunci: pemrograman kendala yang berubah, tingkat kepercayaan, koefisien fungsi objektif, konstanta sisi kanan, optimal

Abstract

Change-Constrained Programming (CCP) is an optimization model developed to solve probabilistic problems. In real world, particularly in the industry, constrained *coefficients and right-hand side constants cannot be firmly determined. This paper explains how the CCP is used to optimize the company profits by making various products using various machines that have limited capacity and are probabilistic. It was evident that CCP can succesfully provide an optimal solution.*

Keywords: *Change-Constrained Programming, level of confidence, objective function coefficient, righ-hand-side, optimal*

Tanggal Terima Naskah : 17 Juli 2012
Tanggal Persetujuan Naskah : 21 Desember 2012

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Dalam masalah optimasi di dunia nyata dan aplikasi di dunia industri secara khusus, koefisien fungsi objektif, koefisien kendala *(constraint's)* dan konstanta sisi kanan (*right hand side* - R.H.S) pada dasarnya tidak dapat ditentukan dengan pasti. Dalam proses produksi di sebuah pabrik misalnya, waktu proses setiap unit produk pada sebuah mesin cenderung bervariasi. Meskipun dalam proses produksi yang bersifat otomasi, variasi dalam proses produksi masih terjadi, dan hal tersebut merupakan kondisi yang wajar. Demikian juga dengan kapasitas yang tersedia umumnya tidak senantiasa konstan dalam satu periode tertentu. Sebuah mesin, misalnya, memiliki kapasitas yang tidak selalu sama dalam satu bulan, karena ada saatnya mesin tersebut mengalami kerusakan pada waktu tertentu atau masuk dalam program perawatan, sehingga kapasitas yang tersedia pada suatu periode menjadi berubah.

Dengan kondisi dunia industri yang umumnya bersifat tidak pasti dan cenderung bersifat kompleks, maka model optimasi yang bersifat probabilistik semakin berkembang. Salah satu diantaranya *Change-Constrained Programming (CCP)*. Model optimasi ini mempertimbangkan kemungkinan adanya variasi variabel, sebagaimana terjadi dalam dunia nyata. Model CCP mengakomodir adanya variasi data pada koefisien kendala, konstanta sisi kanan, dan koefisien fungsi objektif, baik terjadi secara terpisah maupun secara bersamaan (serempak). Model CCP menemukan solusi optimal yang bersifat probabilistik, dimana solusi yang diperoleh dinyatakan dalam tingkat kepercayaan tertentu. Dalam hal ini solusi yang diperoleh tidak dapat dinyatakan secara pasti, karena data yang digunakan tidak pasti, namun memiliki tingkat galat tertentu yang relatif sangat kecil.

Tulisan ini memperkenalkan penggunaan *Change-Constrained Programming* untuk mengatasi masalah optimasi yang bersifat probabilistik. Metode ini pada dasarnya masih menggunakan prinsip deterministik dan adanya variabel yang bersifat probabilistik beserta asumsi-asumsinya. Penentuan solusi optimal dilakukan dengan bantuan *software* Win QSB+.

1.2 Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini adalah bagaimana memformulasikan masalah optimasi yang bersifat probabilistik sekaligus menemukan solusi optimalnya dengan menggunakan *Change-Constrained Programming*.

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah menggunakan *Change-Constrained Programming* untuk memecahkan masalah program linier yang memiliki nilai koefisien kendala dan konstanta sisi kanan yang bersifat probabilistik. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi masukan dalam pemodelan dan penentuan solusi optimal pada masalah optimasi yang mendekati masalah nyata, yang umumnya bersifat probabilistik.

1.4 Pembatasan Masalah

Masalah yang dibahas dalam penelitian ini hanya pada model masalah maksimisasi, dengan empat jenis produk dimana produk tersebut memiliki nilai keuntungan yang tetap, tiga jenis *resource's*, yaitu tiga mesin yang memiliki kapasitas yang bervariasi, dan waktu proses produksi setiap produk pada ketiga jenis mesin yang juga bervariasi.

2. OPTIMASI PROBABILISTIK

2.1 *Stochastic Programming*

Stochastic Programming berkaitan dengan beberapa atau semua parameter *problem* yang dinyatakan dalam bentuk variabel acak *(random variables)*. Dalam kenyataannya sangat sulit menentukan nilai sebuah parameter secara pasti. Analisis Sensitivitas dan *Parametric Programming* sangat efektif digunakan untuk memprediksi solusi optimal bila parameter berubah dalam interval tertentu, namun gagal untuk memprediksi karakteristik solusi optimal bila parameter dalam bentuk probabilistik. Untuk masalah dengan parameter yang bersifat *probabilistik* dapat diselesaikan dengan *Stochastik Programming*. Tujuan dari *Stochastic Programming* yaitu mendapatkan solusi optimal yang bersifat acak/*random* [1].

Ide dasar dari semua model *Stochastic Programming* adalah mengkonversi kondisi probabilistik sebuah masalah ke dalam bentuk program deterministik yang sesuai. Beberapa model telah dikembangkan untuk mengatasi beberapa kondisi khusus dari masalah umum. Dalam hal ini, metode yang dapat digunakan untuk proses konversi model probabilistik ke model deterministik adalah *Change-Constrained Programming* [1].

2.2 *Change-Constrained Programming*

Sebuah problem berbentuk *Change-Constrained Programming* didefinisikan sebagai [2]:

Maksimumkan $Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ ....(1)

dengan kendala :

$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge 1-\alpha_i$, i = 1, 2, ….., m; $x_j \ge 0$ untuk semua j..........(2)

Nama "*Chance-Constrained*" berlaku untuk setiap kendala $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$ dengan nilai peluang kejadian minimal sebesar $(1-\alpha_i)$, dimana $0 < \alpha_i < 1$.

Dalam kasus umum diasumsikan bahwa c_j, a_{ij} dan b_i merupakan variabel *random*. Pendekatan yang umum digunakan bila c_j bersifat variabel *random* adalah dengan pendekatan nilai harapan *(expected value)*. Hal ini menimbulkan tiga kondisi khusus yang akan dibahas dalam bagian berikut [2].

2.2.1 Matriks Koefisien Biaya Bersifat *Random Variable* (Kasus 1)

Matriks biaya atau a_{ij} berbentuk variabel *random* memiliki rata-rata *(mean)* E{a_{ij}} dan variansi Var {aij}. Kovariansi antara a_{ij} dan $a_{i'j'}$ dinyatakan dengan cov (a_{ij}, $a_{i'j'}$). Kendala ke-i dinyatakan dengan persamaan [2]:

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i\right\} \ge 1-\alpha_i \quad \text{..........(3)}$$

Misalkan sebuah persamaan dinyatakan dengan:

$$h_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \quad \text{..........(4)}$$

Persamaan h_i berbentuk distribusi normal dengan parameter:

$$E\{h_i\} = \sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\} x_j \quad \text{..........(5)}$$

$$Var\{h_i\} = X^T D_i S X \qquad (6)$$

$$X = (x_1, ..., x_n)^T \qquad (7)$$

$$D_i = \begin{pmatrix} \operatorname{var}\{a_{i1}\} & .... & \operatorname{cov}\{a_{i1}, a_{in}\} \\ . & .... & . \\ \operatorname{cov}\{a_{in}, a_{i1}\} & .... & \operatorname{var}\{a_{in}\} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Dengan menggunakan persamaan (4), (5), (6), (7) dan (8) maka persamaan (3) menjadi:

$$P\{h_i \le b_i\} = P\left\{\frac{h_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\operatorname{var}\{h_i\}}} \le \frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\operatorname{var}\{h_i\}}}\right\} \ge 1 - \alpha_i \qquad (9)$$

Dengan $(h_i - E\{h_i\}) / \sqrt{\operatorname{var}\{h_i\}}$ sebuah distribusi normal dengan rata-rata 0 dan variansi 1, maka persamaan (9) menjadi:

$$P\{h_i \le b_i\} = \Phi\left\{\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\operatorname{var}\{h_i\}}}\right\} \qquad (10)$$

Dimana Φ menyatakan *cumulative distribution of function* (CDF) dari sebuah distribusi normal yang distandarisasi.

Misalkan $K_{\alpha i}$ merupakan nilai standar normal, sehingga $\Phi(K_{\alpha i}) = 1 - \alpha_i$, maka pernyataan bahwa $P\{h_i \le b_i\} \ge 1 - \alpha_i$ akan terbukti benar bila dan hanya bila

$$\frac{b_i - E\{h_i\}}{\sqrt{\operatorname{var}\{h_i\}}} \ge K_{\alpha i} \qquad (11)$$

Kondisi ini menghasilkan kendala berbentuk *nonlinier*:

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\} x_j + K_{\alpha i} \sqrt{X^T D_i X} \le b_i \qquad (12)$$

Persamaan (12) merupakan persamaan yang ekivalen dengan kendala stokastik awal (persamaan (3)).

Bila distribusi normal adalah independen dengan $\operatorname{cov}\{a_{ij}, a_{i'j'}\} = 0$, maka persamaan (12) berubah menjadi :

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\} x_j + K_{\alpha i} \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \operatorname{var}\{a_{ij}\} x_j^2} \le b_i \qquad (13)$$

Kendala persamaan (13) dalam diselesaikan dengan *Separable Programming* dengan melakukan substitusi persamaan, untuk semua i [2]:

$$y_i = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}\{a_{ij}\} x_j^2} \quad \text{.......... (14)}$$

Dengan demikian kendala stokastik awal dari persamaan (3) menjadi 2 persamaan kendala, untuk nilai $y_i \geq 0$, yaitu:

$$\sum_{j=1}^{n} E\{a_{ij}\} x_j + K_{\alpha i} y_i \leq b_i \quad \text{.......... (15)}$$

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{var}\{a_{ij}\} x_j^2 - y_i^2 = 0 \quad \text{.......... (16)}$$

2.2.2 Konstanta Sisi Kanan Bersifat *Random* Variabel (Kasus 2)

Dalam kondisi konstanta sisi kanan berbentuk distribusi normal dengan rata-rata $E\{b_i\}$ dan variansi $\mathrm{var}\{b_i\}$, dapat dipecahkan dengan pendekatan yang hampir sama dengan Kasus 1. Misalkan kendala stokastik dinyatakan dengan [2]:

$$P\left\{ b_i \geq \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \right\} \geq \alpha_i \quad \text{.......... (17)}$$

Dengan mengikuti prinsip pemecahan pada Kasus 1, maka diperoleh:

$$P\left\{ \frac{h_i - E\{b_i\}}{\sqrt{\mathrm{var}\{b_i\}}} \geq \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\mathrm{var}\{b_i\}}} \right\} \geq \alpha_i \quad \text{.......... (18)}$$

Persamaan (18) akan terbukti benar bila dan hanya bila

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - E\{b_i\}}{\sqrt{\mathrm{var}\{b_i\}}} \leq K_{\alpha i} \quad \text{.......... (19)}$$

Dengan demikian maka kendala stokastik sebagaimana dinyatakan dalam persamaan (17) berubah menjadi kendala linier berbentuk deterministik:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq E\{b_i\} + K_{\alpha i} \sqrt{\mathrm{var}\{b_i\}} \quad \text{.......... (20)}$$

2.2.3. Matriks Koefisien Biaya dan Konstanta Sisi Kanan Bersamaan Bersifat *Random* Variabel (Kasus 3)

Sebuah persamaan kendala berbentuk:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \quad \text{.......... (21)}$$

Persamaan (21) ini juga dapat dinyatakan dengan:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i \leq 0 \quad \text{(22)}$$

Dalam kondisi matriks koefisien biaya a_{ij} dan konstanta sisi kanan b_i berbentuk distribusi normal, maka sesuai teori statistik dinyatakan bahwa $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j - b_i$ juga berdistribusi normal. Masalah ini dapat dipecahkan seperti pembahasan pada Kasus 1 dan Kasus 2 [3].

3. STUDI KASUS OPTIMALISASI JUMLAH PRODUKSI

3.1 Gambaran Umum

Sebuah perusahaan membuat empat jenis produk A, B, C dan D, menggunakan tiga jenis mesin M_1, M_2, dan M_3. Setiap produk cukup diproses pada sebuah mesin saja dan keempat produk dapat menggunakan setiap mesin. Berdasarkan pengalaman selama ini, waktu proses setiap produk di setiap mesin tidak selalu sama. Namun waktu proses tersebut membentuk distribusi normal dengan parameter tertentu, sebagai berikut.

Tabel 1. Waktu proses produk pada mesin (menit)

Mesin	Produk							
	A		B		C		D	
	μ	σ^2	μ	σ^2	μ	σ^2	μ	σ^2
M-1	4	1	4	1	4	1	4	1
M-2	3	0.5	5	1	5	1.5	3	0.25
M-3	4	0.5	5	0.9	2	0.5	4	0.75

Demikian juga dengan waktu mesin yang tersedia *(time available)* tidak selalu sama, karena mesin dalam waktu tertentu mengalami kerusakan. Namun berdasarkan pengalaman, waktu yang tersedia untuk setiap mesin memiliki distribusi normal dengan parameter tertentu, sebagai berikut.

Tabel 2. Kapasitas mesin produksi (jam)

Mesin	Kapasitas Tersedia/Hari	
	μ	σ^2
M-1	18	1
M-2	20	0.5
M-3	21	0.5

Keuntungan bersih yang diperoleh perusahaan untuk masing-masing produk A, B, C dan D (dalam ribu Rupiah) sebesar 4, 5 4 dan 6. Model ini mengabaikan adanya waktu *set-up* untuk setiap mesin, sedangkan tingkat keyakinan yang diharapkan perusahaan sebesar 95 persen. Perusahaan berhadapan dengan masalah penentuan jumlah produksi masing-masing produk agar diperoleh keuntungan maksimum.

3.2 Formulasi

Masalah di atas dinyatakan sebagai *Chance-Contrained-Programming*, sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
&\text{Maksimum} \quad Z = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_3 \\
&\text{d.k.} \quad P\{a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \leq b_1\} \geq 0.95 \\
&\qquad P\{a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \leq b_2\} \geq 0.95 \\
&\qquad P\{a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \leq b_3\} \geq 0.95 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}
$$

Parameter masing-masing variabel *random* dinyatakan sebagai berikut.

Tabel 3. Nilai parameter variabel *random*

Variabel *Random*	E(x)	var (x)
a_{11}	4	1.00
a_{12}	4	1.00
a_{13}	4	1.00
a_{14}	4	1.00
a_{21}	3	0.50
a_{22}	5	1.00
a_{23}	5	1.50
a_{24}	3	0.25
a_{31}	4	0.50
a_{32}	5	0.90
a_{33}	2	0.50
a_{34}	4	0.75
b_1	1080	60
b_2	1200	30
b_3	1260	30

Dari tabel normal didapat $K_{\alpha 1} = K_{\alpha 2} = K_{\alpha 3} = 1.645$. Dengan menggunakan persamaan (15), (16), dan (20) maka bentuk masalah stokastik berubah menjadi masalah *deterministic*, sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
&\text{Maksimum} \quad Z = 4x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 6x_4 \\
&\text{d.k.} \quad 4x_1 + 4x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 1.645y_1 \leq 1080 + 1.645(60) = 1179 \\
&\qquad 3x_1 + 5x_2 + 5x_3 + 3x_4 + 1.645y_2 \leq 1200 + 1.645(30) = 1250 \\
&\qquad 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 1.645y_3 \leq 1260 + 1.645(30) = 1310 \\
&\qquad x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 - y_1^2 = 0 \\
&\qquad 0.5x_1^2 + x_2^2 + 1.5x_3^2 + 0.25x_4^2 - y_2^2 = 0 \\
&\qquad 0.5x_1^2 + 0.9x_2^2 + 0.5x_3^2 + 0.75x_4^2 - y_3^2 = 0 \\
&\qquad x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3 \geq 0
\end{aligned}
$$

3.3 Konversi Nonlinier Menjadi Model Linier

Pemecahanan masalah di atas dapat dilakukan dengan mengubah *problem nonlinier* di atas menjadi *problem linier* dengan pendekatan *Separable Programming*. Jumlah *grid point* sebanyak 6, sehingga diperoleh nilai masing-masing variabel untuk setiap setiap nilai *grid point*, sebagai berikut.

Tabel 4. Nilai variabel pada *grid point*

K	x_{k1}	x_{k2}	x_{k3}	x_{k4}	x_{k5}	x_{k6}	x_{k7}
0	0	0	0	0	0	0	0
1	60	50	50	60	150	160	160
2	120	100	100	120	300	320	320
3	180	150	150	180	450	480	480
4	240	200	200	240	600	640	640
5	300	250	250	300	750	800	800

Nilai fungsi objektif dan fungsi kendala untuk setiap variabel sesuai hasil formulasi matematis di atas, sehingga diperoleh formulasi yang baru, sebagai berikut.

$$
\begin{aligned}
\text{Min } \bar{Z} = {} & 0\lambda_{01} + 240\lambda_{11} + 480\lambda_{21} + 720\lambda_{31} + 960\lambda_{41} + 1200\lambda_{51} \\
& + 0\lambda_{02} + 250\lambda_{12} + 500\lambda_{22} + 750\lambda_{32} + 1000\lambda_{42} + 1250\lambda_{52} \\
& + 0\lambda_{03} + 250\lambda_{13} + 500\lambda_{23} + 750\lambda_{33} + 1000\lambda_{43} + 1250\lambda_{53} \\
& + 0\lambda_{04} + 360\lambda_{14} + 720\lambda_{24} + 1080\lambda_{34} + 1440\lambda_{44} + 1800\lambda_{54}
\end{aligned}
$$

d.k.

$$
\begin{aligned}
& 0\lambda_{01} + 240\lambda_{11} + 480\lambda_{21} + 720\lambda_{31} + 960\lambda_{41} + 1200\lambda_{51} \\
& + 0\lambda_{02} + 200\lambda_{12} + 400\lambda_{22} + 600\lambda_{32} + 800\lambda_{42} + 1000\lambda_{52} \\
& + 0\lambda_{03} + 200\lambda_{13} + 400\lambda_{23} + 600\lambda_{33} + 800\lambda_{43} + 1000\lambda_{53} \\
& + 0\lambda_{04} + 240\lambda_{14} + 480\lambda_{24} + 720\lambda_{34} + 960\lambda_{44} + 1200\lambda_{54} \\
& + 0\lambda_{05} + 247\lambda_{15} + 494\lambda_{25} + 740\lambda_{35} + 987\lambda_{45} + 1234\lambda_{55} \leq 1179
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 0\lambda_{01} + 360\lambda_{11} + 360\lambda_{21} + 540\lambda_{31} + 720\lambda_{41} + 900\lambda_{51} \\
& + 0\lambda_{02} + 150\lambda_{12} + 300\lambda_{22} + 450\lambda_{32} + 600\lambda_{42} + 750\lambda_{52} \\
& + 0\lambda_{03} + 150\lambda_{13} + 300\lambda_{23} + 450\lambda_{33} + 600\lambda_{43} + 750\lambda_{53} \\
& + 0\lambda_{04} + 180\lambda_{14} + 360\lambda_{24} + 540\lambda_{34} + 720\lambda_{44} + 900\lambda_{54} \\
& + 0\lambda_{06} + 263\lambda_{16} + 526\lambda_{26} + 790\lambda_{36} + 1053\lambda_{46} + 1316\lambda_{56} \leq 1250
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 0\lambda_{01} + 240\lambda_{11} + 480\lambda_{21} + 720\lambda_{31} + 960\lambda_{41} + 1200\lambda_{51} \\
& + 0\lambda_{02} + 200\lambda_{12} + 400\lambda_{22} + 600\lambda_{32} + 800\lambda_{42} + 1000\lambda_{52} \\
& + 0\lambda_{03} + 200\lambda_{13} + 400\lambda_{23} + 600\lambda_{33} + 800\lambda_{43} + 1000\lambda_{53} \\
& + 0\lambda_{04} + 240\lambda_{14} + 480\lambda_{24} + 720\lambda_{34} + 960\lambda_{44} + 1200\lambda_{54} \\
& + 0\lambda_{07} + 263\lambda_{17} + 526\lambda_{27} + 790\lambda_{37} + 1053\lambda_{47} + 1316\lambda_{57} \leq 1310
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 0\lambda_{01} + 3600\lambda_{11} + 14400\lambda_{21} + 32400\lambda_{31} + 57600\lambda_{41} + 90000\lambda_{51} \\
& + 0\lambda_{02} + 2500\lambda_{12} + 10000\lambda_{22} + 22500\lambda_{32} + 40000\lambda_{42} + 62500\lambda_{52} \\
& + 0\lambda_{03} + 2500\lambda_{13} + 10000\lambda_{23} + 22500\lambda_{33} + 40000\lambda_{43} + 62500\lambda_{53} \\
& + 0\lambda_{04} + 3600\lambda_{14} + 14400\lambda_{24} + 32400\lambda_{34} + 57600\lambda_{44} + 90000\lambda_{54} \\
& - 0\lambda_{05} - 22500\lambda_{15} - 90000\lambda_{25} - 202500\lambda_{35} - 360000\lambda_{45} - 562500\lambda_{55} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& 0\lambda_{01} + 1800\lambda_{11} + 7200\lambda_{21} + 16200\lambda_{31} + 28800\lambda_{41} + 45000\lambda_{51} \\
& + 0\lambda_{02} + 2500\lambda_{12} + 10000\lambda_{22} + 22500\lambda_{32} + 40000\lambda_{42} + 62500\lambda_{52} \\
& + 0\lambda_{03} + 3750\lambda_{13} + 15000\lambda_{23} + 33750\lambda_{33} + 60000\lambda_{43} + 93750\lambda_{53} \\
& + 0\lambda_{04} + 900\lambda_{14} + 3600\lambda_{24} + 8100\lambda_{34} + 14400\lambda_{44} + 22500\lambda_{54} \\
& - 0\lambda_{06} - 25600\lambda_{16} - 102400\lambda_{26} - 203400\lambda_{36} - 409600\lambda_{46} - 640000\lambda_{56} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&0\lambda_{01} + 1800\lambda_{11} + 7200\lambda_{21} + 16200\lambda_{31} + 28800\lambda_{41} + 45000\lambda_{51} \\
&+ 0\lambda_{02} + 2250\lambda_{12} + 9000\lambda_{22} + 20250\lambda_{32} + 36000\lambda_{42} + 56250\lambda_{52} \\
&+ 0\lambda_{03} + 2250\lambda_{13} + 9000\lambda_{23} + 20250\lambda_{33} + 36000\lambda_{43} + 56250\lambda_{53} \\
&+ 0\lambda_{04} + 3240\lambda_{14} + 12960\lambda_{24} + 29160\lambda_{34} + 51840\lambda_{44} + 81000\lambda_{54} \\
&- 0\lambda_{07} - 25600\lambda_{17} - 102400\lambda_{27} - 230400\lambda_{37} - 409600\lambda_{47} - 640000\lambda_{57} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\lambda_{01} + \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} = 1 \\
&\lambda_{02} + \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} + \lambda_{42} + \lambda_{52} = 1 \\
&\lambda_{03} + \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{33} + \lambda_{43} + \lambda_{53} = 1 \\
&\lambda_{04} + \lambda_{14} + \lambda_{24} + \lambda_{34} + \lambda_{44} + \lambda_{54} = 1 \\
&\lambda_{05} + \lambda_{15} + \lambda_{25} + \lambda_{35} + \lambda_{45} + \lambda_{55} = 1 \\
&\lambda_{06} + \lambda_{16} + \lambda_{26} + \lambda_{36} + \lambda_{46} + \lambda_{56} = 1 \\
&\lambda_{07} + \lambda_{17} + \lambda_{27} + \lambda_{37} + \lambda_{47} + \lambda_{57} = 1
\end{aligned}
$$

$x_{kj} \geq 0$ untuk k = 0, 1, 2, 3, 4, dan 5; j = 1, 2, 3, 4, 5, 6 dan 7.

3.4 Solusi Optimal

Masalah di atas telah berubah menjadi model linier dengan 35 variabel dan 13 kendala, di luar kendala *nonnegativitas*. Secara manual solusi optimal sangat sulit didapatkan. Dalam hal ini solusi optimal diperoleh mengggunakan *Software* Win WSB+, sebagai berikut.

07-17-2012 13:29:44	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price
1	C1	1,179.0000	<=	1,179.0000	0	1.2166
2	C2	820.7107	<=	1,250.0000	429.2893	0
3	C3	1,158.8480	<=	1,310.0000	151.1524	0
4	C4	0.0031	=	0	0	0.0027
5	C5	-0.0007	=	0	0	0
6	C6	0.0009	=	0	0	0
7	C7	1.0000	=	1.0000	0	0
8	C8	1.0000	=	1.0000	0	0
9	C9	1.0000	=	1.0000	0	0
10	C10	1.0000	=	1.0000	0	118.2922
11	C11	1.0000	=	1.0000	0	0
12	C12	1.0000	=	1.0000	0	0
13	C13	1.0000	=	1.0000	0	0
	Objective	Function	(Max.) =	1,552.7070		

Gambar 1. *Constraint summary* pada Win QSB+

Dari Gambar 1 terlihat bahwa solusi yang diperoleh sebesar 1552,7070. Solusi yang diperoleh memenuhi sebanyak 13 kendala yang ada. Dari tiga kendala pertidaksamaan, hanya kendala pertama yang menggunakan sumber daya sepenuhnya, dalam hal ini Mesin-1 digunakan secara maksimal, sedangkan dua kendala lainnya, yaitu Mesin 2 dan Mesin 3 tidak dipergunakan sepenuhnya. Setiap hari ada sebanyak 429 menit Mesin 2 dan 151 menit Mesin 3 memiliki waktu mengganggur *(idle time)*.

07-17-2012 12:31:46	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit C(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status
1	A01	1.0000	0	0	0	basic
2	A11	0	240.0000	0	-61.6014	at bound
3	A21	0	480.0000	0	-142.4199	at bound
4	A31	0	720.0000	0	-242.4553	at bound
5	A41	0	960.0000	0	-361.7078	at bound
6	A51	0	1,200.0000	0	-500.1774	at bound
7	A02	1.0000	0	0	0	basic
8	A12	0	250.0000	0	0	at bound
9	A22	0	500.0000	0	-13.3452	at bound
10	A32	0	750.0000	0	-40.0355	at bound
11	A42	0	1,000.0000	0	-80.0709	at bound
12	A52	0	1,250.0000	0	-133.4516	at bound
13	A03	0.5492	0	0	0	basic
14	A13	0.4508	250.0000	112.7073	0	basic
15	A23	0	500.0000	0	-13.3452	at bound
16	A33	0	750.0000	0	-40.0355	at bound
17	A43	0	1,000.0000	0	-80.0709	at bound
18	A53	0	1,250.0000	0	-133.4516	at bound
19	A04	0	0	0	-118.2922	at bound
20	A14	0	360.0000	0	-59.8936	at bound
21	A24	0	720.0000	0	-20.7120	at bound
22	A34	0	1,080.0000	0	-0.7475	at bound
23	A44	1.0000	1,440.0000	1,440.0000	0	basic
24	A54	0	1,800.0000	0	-18.4695	at bound
25	A05	0.8956	0	0	0	basic
26	A15	0	0	0	-240.4562	at bound
27	A25	0	0	0	-360.8059	at bound
28	A35	0	0	0	-359.8326	at bound
29	A45	0	0	0	-239.9695	at bound
30	A55	0.1044	0	0	0	basic
31	A06	0.9749	0	0	0	basic
32	A16	0	0	0	0	at bound
33	A26	0	0	0	0	at bound
34	A36	0	0	0	0	at bound
35	A46	0	0	0	0	at bound
36	A56	0.0251	0	0	0	basic
37	A07	0.9174	0	0	0	basic
38	A17	0	0	0	0	at bound
39	A27	0	0	0	0	at bound
40	A37	0	0	0	0	at bound
41	A47	0	0	0	0	at bound
42	A57	0.0826	0	0	0	basic
	Objective	Function	(Max.) =	1,552.7070	Note: Alternate	Solution Exists!

Gambar 2. Solusi optimal pada Win QSB+

Dari Gambar 1 terlihat bahwa solusi optimal masalah di atas sebesar 1.552,7070. Namun solusi ini masin menggunakan variabel konversi. Hasil perhitungan dengan menggunakan Win QSB+ pada Gambar 1 masih berupa solusi optimal menggunakan variabel konversi. Adapaun nilai variabel problem awal dapat dihitung, sebagai berikut.

$$x_1 = x_{01}\lambda_{01} + x_{11}\lambda_{11} + x_{21}\lambda_{21} + x_{31}\lambda_{31} + x_{41}\lambda_{41} + x_{51}\lambda_{51}$$
$$= (0)(1) + (60)(0) + (120)(0) + (180)(0) + (240)(0) + (300)(0) = 0$$

$x_2 = x_{02}\lambda_{02} + x_{12}\lambda_{12} + x_{22}\lambda_{22} + x_{32}\lambda_{32} + x_{42}\lambda_{42} + x_{52}\lambda_{52}$
$= (0)(1) + (50)(0) + (100)(0) + (150)(0) + (200)(0) + (250)(0) = 0$

$x_3 = x_{03}\lambda_{03} + x_{13}\lambda_{13} + x_{23}\lambda_{23} + x_{33}\lambda_{33} + x_{43}\lambda_{43} + x_{53}\lambda_{53}$
$= (0)(0.5492) + (50)(0.4508) + (100)(0) + (150)(0) + (200)(0) + (250)(0) = 22.5$

$x_4 = x_{04}\lambda_{04} + x_{14}\lambda_{14} + x_{24}\lambda_{24} + x_{34}\lambda_{34} + x_{44}\lambda_{44} + x_{54}\lambda_{54}$
$= (0)(0) + (60)(0) + (120)(0) + (180)(0) + (240)(240) + (300)(0) = 240$

Maks Z = (4)(0) +5(0) + (4)(22.5) + (6)(240) = 1530,16

Terlihat bahwa nilai optimal yang diperoleh dengan menggunakan variabel awal mendekati nilai optimal dengan variabel konversi menggunakan bantuan Win QSB. Selisih kedua nilai optimal tersebut akan semakin kecil seiring peningkatan jumlah *grid point* yang digunakan. Namun jumlah *grid point* yang semakin besar menimbulkan penambahan variabel dan kendala, sehingga kurang praktis dalam perhitungan.

4. PEMBAHASAN

Solusi optimal yang diperoleh dengan bantuan Win QSB+ menunjukkan bahwa Mesin 1 dimanfaatkan secara penuh. Namun penggunaan Mesin 2 dan Mesin 3 masing-masing hanya sebesar 65.7 persen dan 88.5 persen. Pemanfaatan secara penuh Mesin 1 terjadi karena Mesin 1 memiliki kapasitas rata-rata paling kecil di antara tiga mesin yang ada. Solusi optimal yang diperoleh akan berbeda bila kapasitas ketiga mesin cenderung sama.

Solusi yang diperoleh di atas pada dasarnya bersifat probabilistik. Dengan nilai $\alpha = 0.05$, berarti tingkat kepercayaan sebesar $(1-\alpha) = 0.95$ atau 95 persen. Solusi ini mengandung arti bahwa nilai optimal yang diperoleh bisa berbeda, namun kemungkinannya sangat kecil, yaitu hanya 5 persen saja. Perubahan tersebut bisa terjadi bila dalam kenyataannya waktu proses produksi dan kapasitas harian masing-masing mesin bervariasi, melebihi batas yang dinyatakan dalam parameter. Namun kemungkinan penyimpangan tersebut sangat kecil. Walaupun waktu proses produksi setiap produk pada masing-masing mesin bervariasi dan kapasitas harian mesin juga mengalami perubahan, namun solusi optimal yang diperoleh sudah optimal, dengan tingkat keyakinan 95 persen.

Solusi yang diperoleh menunjukkan bahwa produk A dan B tidak diproduksi, sedangkan jumlah produksi harian produk C sebanyak 22.5 unit, dan produk D sebanyak 240 unit. Jumlah produksi yang sangat besar untuk produk D terjadi karena dari keempat jenis produk tersebut, produk D memiliki keuntungan per unit terbesar, sedangkan produk C diproduksi karena proses produksi pembuatan produk C memiliki waktu terkecil di antara keempat jenis produk pada ketiga mesin tersebut.

5. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan di atas diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1) *Change-Constrained Programming* merupakan model pemecahan masalah yang tepat untuk kondisi koefisien fungsi kendala dan konstanta sisi kanan dalam kondisi tidak pasti *(probabilistic)*. Dalam kondisi nyata, koefisien fungsi kendala dan konstanta sisi kanan tidak senantiasa tersedia dalam sebuah nilai yang pasti, namun umumnya memiliki distribusi peluang tertentu.
2) Dengan menggunakan *Change-Constrained Programming* dibantu *software* Win QSB+ terlihat bahwa, dengan tingkat keyakinan 95 persen, dari empat jenis produk yang dapat dikerjakan perusahaan hanya memproduksi dua jenis produk saja, yaitu

produk C sebanyak 22.5 unit/hari dan produk D sebanyak 240 unit/hari, dengan nilai keuntungan optimal setiap hari sebesar Rp. 1.552.707,-.

3) Konversi model nonlinier menjadi model linier memungkinan masalah nonlinier dapat dipecahkan dengan prinsip model linier. Adapun jembatan penghubung dapat menggunakan *grid point.* Semakin besar jumlah *grid point* yang digunakan maka hasil keduanya menjadi sama, namun proses perhitungannya menjadi semakin kurang praktis.
4) Untuk penelitian lanjutan diharapkan dapat mempertimbangkan variasi pada koefisien fungsi objektif, kemungkinan penggunaan simulasi dalam mendapatkan hasil yang lebih mendekati kenyataan, dan kemungkinan data mengikuti distribusi lain selain distribusi normal.

REFERENSI

[1]. Hillier, Frederick S, Lieberman J. Gerald*,"Introduction to Operations Research"*, Sixth Edition, McGraw-Hill, Inc, 1995.

[2]. Hamdy A. Taha,"*Operations Research, An Introduction*", Fifth Edition, Macmillan, Inc, 1992.

[3]. Don T. Philips, et.al., "*Operation Research: Principle and Practice"*, 2nd edition, John Wiley and Sons, 1987.