HEURISTIK UNTUK MEMPERCEPAT PEMBUKTIAN VALIDITAS ARGUMEN DENGAN TABLO SEMANTIK DI LOGIKA PREDIKAT

HEURISTIC METHOD TO ACCELERATE PROOF OF VALIDITY ARGUMENT USING SEMANTIC TABLEAUX IN PREDICATE LOGIC

Djoni Dwijono

Program Studi Sistem Informasi, Fakultas Teknologi Informasi,
Universitas Kristen Duta Wacana
Jl. dr. Wahidin Sudirohusodo No. 5-25, Yogyakarta-55224
djonid@staff.ukdw.ac.id

Abstrak

Pembuktian validitas suatu argumen dengan menggunakan Tablo Semantik pada ranah logika predikat dapat dilakukan dengan memakai aturan-aturannya. Namun jika mengikuti aturannya, maka jalan pembuktiannya dapat menjadi panjang dan melebar karena aturan tersebut tidak memberi pedoman pengambilan bentuk logika yang diambil untuk dijalankan sesuai aturannya. Pengambilan aturan tersebut jika diberi tambahan heuristik-heuristik yang sesuai, maka pembuktian validitas argumen dapat menjadi lebih pendek.

Kata Kunci: Heuristik, Tablo Semantik, Logika Predikat, Validitas Argumen

Abstract

The validity of an argument using the Semantic Tableaux in predicate logic can be verified by applying the rules. But, if the rules are followed, the verification path will be longer and wider since the rule does not provide guidance to choose which logic form to follow according to the rules. Taking these rules in addition to appropriate heuristic methods, can shorten the argument validity verification.

Keywords: *Heuristic Method, Semantic Tableaux, Predicate Logic, Argument Validity*

Tanggal Terima Naskah : 29 Mei 2017
Tanggal Persetujuan Naskah : 17 Oktober 2017

1. PENDAHULUAN

Logika predikat (*predicate logic*) merupakan pengembangan dari logika proposisional (*propositional logic*). Pengembangan tersebut ditandai dengan munculnya kuantor-kuantor (*quantifiers*) yang merepresentasikan kata “Semua” dan “Ada”, misalnya pada kalimat “Semua mahasiswa pandai” dan “Ada mahasiswa pandai”.

Kuantor yang menggantikan kata “Semua” diberi simbol $\forall$ sedangkan kuantor yang menggantikan kata “Ada” diberi simbol $\exists$ [1], misalnya $\forall x$ untuk “Semua x” dan $\exists x$ untuk “Ada x”. Sebagai contoh, perhatikan sebuah argumen yang memiliki premis-premis dan satu kesimpulan, yang diubah menjadi ekspresi berbentuk logika predikat, misalnya argumen berikut:

Premis ke-1: Semua Gajah memiliki belalai ⟶ $(\forall x)(G(x)\rightarrow B(x))$

Premis ke-2: Bona seekor Gajah ⟶ $G(b)$

Kesimpulan: Dengan demikian, Bona memiliki belalai ⟶ $\therefore B(b)$

Dalam bentuk ekspresi logika, akan tampak seperti berikut:

$$\{(\forall x)(G(x)\rightarrow B(x)), G(b)\} \vdash B(b)$$

Argumen yang sudah berbentuk ekspresi logika seperti contoh tersebut memerlukan pembuktian validitasnya. Pembuktian validitas ini dilakukan dengan banyak cara, metode, teknik, dan adakalanya disebut sistem. Pada logika proposisional, pembuktian validitas argumen dilakukan dengan Tabel Kebenaran, Penyederhanaan, Deduksi Alami, misalnya Sistem Hilbert, Sistem Lemmon, Sistem *L*, Resolusi, Logika Aksiomatik, Tablo Semantik. Untuk logika predikat, misalnya Resolusi, Logika Aksiomatik, Tablo Semantik. Pada penelitian ini, untuk keperluan pembuktian validitas argumen pada logika predikat, akan digunakan Tablo Semantik (*Semantic Tableaux*) yang memiliki aturan-aturan tertentu [2].

2. ATURAN-ATURAN TABLO SEMANTIK

Seperti diketahui, logika predikat merupakan pengembangan dari logika proposisional, maka Tablo Semantik yang digunakan di dalam logika predikat juga merupakan pengembangan dari Tablo Semantik yang digunakan di dalam logika proposisional [3]. Aturan-aturan Tablo Semantik dimulai dari yang ada di dalam logika proposisional kemudian ditambah dengan aturan-aturan Tablo Semantik yang ada di dalam logika predikat. Aturan-aturan tersebut [4] seperti berikut:

Aturan (1): $A\wedge B$

$A\wedge B$
A
B

Aturan (2): $A\vee B$

$A\vee B$

A B

Aturan (3): $A\rightarrow B$

$A\rightarrow B$

$\neg A$ B

Aturan (4): $A\leftrightarrow B$

$A\leftrightarrow B$

$A\wedge B$ $\neg A\wedge\neg B$

Aturan (5): $\neg\neg A$

$$\neg\neg A$$
$$A$$

Aturan (6): $\neg(A \wedge B)$

$$\neg(A \wedge B)$$
$$\neg A \qquad \neg B$$

Aturan (7): $\neg(A \vee B)$

$$\neg(A \vee B)$$
$$\neg A$$
$$\neg B$$

Aturan (8): $\neg(A \rightarrow B)$

$$\neg(A \rightarrow B)$$
$$A$$
$$\neg B$$

Aturan (9): $\neg(A \leftrightarrow B)$

$$\neg(A \leftrightarrow B)$$
$$A \wedge \neg B \qquad \neg A \wedge B$$

Aturan-aturan berikut yang berkaitan dengan keberadaan kuantor-kuantor di dalam logika predikat.

Aturan (10): $\forall$

$$(\forall x)A(x)$$
$$A(t)$$

Aturan ini dikenal dengan nama Universal Instantiation (UI) dimana x dapat berubah menjadi t atau apa saja.

Aturan (11). $\exists$

$$(\exists x)A(x)$$
$$A(t)$$

Aturan ini dikenal dengan nama Existential Instantiation (EI).

Aturan (12): $\neg\forall$

$$\neg(\forall x)A(x)$$
$$(\exists x)\neg A(x)$$

Aturan (13): $\neg\exists$

$$\neg(\exists x)A(x)$$
$$(\forall x)\neg A(x)$$

Aturan (14): Inkonsistensi

Jika ada suatu wff A dan ¬A pada suatu cabang, maka terjadi inkonsistensi pada cabang tersebut dan cabang tersebut ditutupdan tidak bisa dikembangkan lagi [5].

Dengan kata lain, jika seluruh cabang yang terbentuk dari penggunaan aturan-aturan Tablo Semantik terjadi inkonsistensi atau ketidakkonsistenan (*inconsistency*) maka seluruh cabang tersebut ditutup, maka argumen tersebut terbukti *valid*. Tetapi jika ada satu saja cabang tetap terbuka, maka argumen tersebut terbukti tidak *valid*.

Secara keseluruhan ada 14 aturan dengan sembilan aturan Tablo Semantik dari logika proposisional dan empat aturan dari logika predikat, sedangkan aturan nomor 14 untuk keduanya [6]. Terlihat dengan jelas dari aturan-aturan Tablo Semantik untuk logika proposisional memang dikembangkan atau ditambah aturan-aturan Tablo Semantik untuk logika predikat.

Aturan-aturan Tablo Semantik di depan tidak ada aturan harus dipakai secara berurutan, tetapi penggunaan aturan tergantung dari soal berupa argumen yang akan dibuktikan validitasnya [7]. Jadi bisa saja aturan 8 dilanjutkan aturan 2, kemudian dilanjutkan aturan 10, dan seterusnya sampai terbukti ada cabang yang memiliki literal yang berpasangan dan terjadilah inkonsistensi, maka cabang ditutup. Jika semua cabang tertutup, maka argumen terbukti *valid* [8].

3. PEMBUKTIAN VALIDITAS ARGUMEN

Di dalam membuktikan validitas argumen, langkah awal yang dilakukan adalah menegasikan kesimpulan terlebih dahulu, misalnya di dalam argumen tersebut tidak ada premis-premis, maka kesimpulan dapat langsung dinegasikan dan langkah-langkah pembuktian validitasnya dapat segera dilakukan. Sebagai contoh:

Buktikan: $\vdash (Vx)A(x) \rightarrow (\exists y)A(y)$

maka langkah awal adalah:

$$\neg((Vx)A(x) \rightarrow (\exists y)A(y))$$

Berikut ini contoh-contoh argumen yang akan dibuktikan validitasnya, yakni:

Contoh 1:

Buktikan: $\{(\forall x)(G(x)\rightarrow B(x)), G(b)\} \vdash B(b)$

Bukti:

(1).	$(\forall x)(G(x)\rightarrow B(x))$		
(2).	$G(b)$		
(3).	$\neg B(b)$		
(4).	$G(b)\rightarrow B(b)$		Aturan 10 pada baris 1
(5).	$\underline{\neg G(b)}$ Tutup	$\underline{B(b)}$ Tutup	Aturan 3 pada baris 4

∴ terbukti

Hal disebabkan karena sudah memenuhi aturan 14 dimana ada G(b) dan ¬G(b) pada satu cabang maka cabang ditutup dan cabang lainnya ada ¬B(b) dan B(b) maka juga ditutup. Karena terjadi inkonsistensi maka validitas argumen tersebut terbukti.

Contoh 2:
Buktikan: $\vdash (\exists x)A(x) \rightarrow (\forall y)A(y)$
Bukti:

(1).	$\neg((\exists x)A(x) \rightarrow (\forall y)A(y))$	
(2).	$(\exists x)A(x)$	Aturan 8 di baris 1
(3).	$\neg(\forall y)A(y)$	Aturan 8 di baris 1
(4).	$A(t)$	Aturan 11 di baris 2
(5).	$(\exists y)\neg A(y)$	Aturan 12 di baris 3
(6).	$\underline{\neg A(t)}$	Aturan 11 di baris 5
	Tutup	

∴ terbukti

Contoh 3:
Buktikan: $\vdash (\exists x)A(x) \rightarrow (\exists y)A(y)$

Bukti:

(1).	$\neg((\exists x)A(x) \rightarrow (\exists y)A(y))$	
(2).	$(\exists x)A(x)$	Aturan 8 di baris 1
(3).	$\neg(\exists y)A(y)$	Aturan 8 di baris 1
(4).	$A(t)$	Aturan 11 di baris 2
(5).	$(\forall y)\neg A(y)$	Aturan 13 di baris 3
(6).	$\underline{\neg A(t)}$	Aturan 10 di baris 5
	Tutup	

∴ terbukti

Contoh 4:
Buktikan: $\vdash (\forall x)(A(x)\wedge B(x))\rightarrow(\exists x)B(x)$
Bukti:

(1).	$\neg((\forall x)(A(x)\wedge B(x))\rightarrow(\exists x)B(x))$	
(2).	$(\forall x)(A(x)\wedge B(x))$	Aturan 8 pada baris 1
(3).	$\neg(\exists x)B(x)$	Aturan 8 pada baris 1
(4).	$A(t)\wedge B(t)$	Aturan 10 pada baris 2
(5).	$(\forall x)\neg B(x)$	Aturan 13 pada baris 3
(6).	$\neg B(t)$	Aturan 10 pada baris 5
(7)	$A(t)$	Aturan 1 pada baris 4
(8)	$\underline{B(t)}$	Aturan 1 pada baris 4
	Tutup	

∴ terbukti

Contoh 5:
Buktikan: $\vdash (\forall x)(A(x)\wedge B(x))\rightarrow(\exists x)B(x)$
Bukti:

(1). $\neg((\forall x)(A(x)\wedge B(x))\rightarrow(\exists x)B(x))$
(2). $(\forall x)(A(x)\wedge B(x))$ Aturan 8 pada baris 1
(3). $\neg(\exists x)B(x)$ Aturan 8 pada baris 1
(4). $A(t)\wedge B(t)$ Aturan 10 pada baris 2
(5). $(\forall x)\neg B(x)$ Aturan 13 pada baris 3
(6). $\neg B(t)$ Aturan 10 pada baris 5
(7). $A(t)$ Aturan 1 pada baris 4
(8). $\underline{B(t)}$ Aturan 1 pada baris 4

Tutup

$\therefore$ terbukti

Contoh 6:
Buktikan: $\vdash (\forall x)((\neg A(x)\rightarrow\neg B(x))\rightarrow(B(x)\rightarrow A(x)))$
Bukti:

(1). $\neg(\forall x)((\neg A(x)\rightarrow\neg B(x))\rightarrow(B(x)\rightarrow A(x)))$
(2). $(\exists x)\neg((\neg A(x)\rightarrow\neg B(x))\rightarrow(B(x)\rightarrow A(x)))$ Aturan 12 pada baris 1
(3). $\neg((\neg A(a)\rightarrow\neg B(a))\rightarrow(B(a)\rightarrow A(a)))$ Aturan 11 pada baris 2
(4). $\neg A(a)\rightarrow\neg B(a)$ Aturan 8 pada baris 3
(5). $\neg(B(a)\rightarrow A(a))$ Aturan 8 pada baris 3
(6). $B(a)$ Aturan 8 pada baris 5
(7). $\neg A(a)$ Aturan 8 pada baris 5

(8). $\neg\neg A(a)$ $\quad$ $\underline{\neg B(a)}$ Aturan 3 pada baris 4
(9). $\underline{A(a)}$ $\quad$ Tutup Aturan 5 pada baris 8

Tutup

$\therefore$ terbukti

Pada contoh 1 sampai dengan contoh 6 masih terlihat bentuk yang sederhana sehingga dapat dengan mudah diikuti urutan-urutan pemakaian aturan yang digunakan untuk pembuktian. Untuk contoh 7 dan contoh 8 berikut akan terasa lebih rumit dan lebih panjang dari contoh-contoh sebelumnya.

Contoh 7:

Buktikan: $\vdash (\forall x)((A(x)\to(B(x)\to C(x)))\to((A(x)\to B(x))\to(A(x)\to C(x))))$

Bukti:

(1). $\neg(\forall x)((A(x)\to(B(x)\to C(x)))\to((A(x)\to B(x))\to(A(x)\to C(x))))$

(2). $(\exists x)\neg((A(x)\to(B(x)\to C(x)))\to((A(x)\to B(x))\to(A(x)\to C(x))))$ Aturan 12 pada baris 1

(3). $\neg((A(a)\to(B(a)\to C(a)))\to((A(a)\to B(a))\to(A(a)\to C(a))))$ Aturan 11 pada baris 2

(4). $A(a)\to(B(a)\to C(a))$ Aturan 8 pada baris 3

(5). $\neg((A(a)\to B(a))\to(A(a)\to C(a))))$ Aturan 8 pada baris 3

(6). $\neg A(a)$ $\quad$ $B(a)\to C(a)$ Aturan 3 pada baris 4

(7). $A(a)\to B(a)$ $\quad$ $A(a)\to B(a)$ Aturan 8 pada baris 5

(8). $\neg(A(a)\to C(a))$ $\quad$ $\neg(A(a)\to C(a))$ Aturan 8 pada baris 5

(9). $\neg A(a)$ $\quad$ $B(a)$ $\quad$ $\neg A(a)$ $\quad$ $B(a)$ Aturan 3 pada baris 7

(10). $A(a)$ $\quad$ $A(a)$ Aturan 8 pada baris 8

(11). $\underline{\neg C(a)}$ $\quad$ $\underline{\neg C(a)}$ Aturan 8 pada baris 8

Tutup Tutup

(12). $\neg B(a)$ $\quad$ $C(a)$ $\quad$ $\underline{\neg B(a)}$ $\quad$ $C(a)$ Aturan 3 pada baris 6

(13). $A(a)$ $\quad$ $A(a)$ $\quad$ Tutup $\quad$ $A(a)$ Aturan 8 pada baris 8

(14). $\underline{\neg C(a)}$ $\quad$ $\underline{\neg C(a)}$ $\quad$ $\underline{\neg C(a)}$ Aturan 8 pada baris 8

Tutup Tutup Tutup

∴ terbukti

Contoh 8:

Buktikan: $\vdash (\forall x)(\forall y)((A(x)\to(B(x,y)\to C(x,y)))\to((A(x)\to B(x,y))\to(A(x)\to C(x,y))))$

Bukti:

(1). $\neg(\forall x)(\forall y)((A(x)\to(B(x,y)\to C(x,y)))\to((A(x)\to B(x,y))\to(A(x)\to C(x,y))))$

(2). $(\exists x)(\exists y)\neg((A(x)\to(B(x,y)\to C(x,y)))\to((A(x)\to B(x,y))\to(A(x)\to C(x,y))))$ Aturan 12 pada baris 1

(3). $\neg((A(a)\to(B(a,b)\to C(a,b)))\to((A(a)\to B(a,b))\to(A(a)\to C(a,b))))$ Aturan 11 pada baris 2

(4). $A(a)\to(B(a,b)\to C(a,b))$ Aturan 8 pada baris 3

(5). $\neg((A(a)\to B(a,b))\to(A(a)\to C(a,b)))$ Aturan 8 pada baris 3

(6). $\neg A(a)$ $\quad$ $B(a,b)\to C(a,b)$ Aturan 3 pada baris 4

(7). $\neg B(a,b)$ Aturan 3 pada baris 6

(8).		C(a,b)		Aturan 3 pada baris 6
(9).	A(a)→B(a,b)	A(a)→B(a,b)		Aturan 8 pada baris 5
(10).	¬(A(a)→C(a,b))	¬(A(a)→C(a,b))		Aturan 8 pada baris 5
(11).	A(a)			
(12).	<u>¬C(a,b)</u> Tutup			
(13).		¬A(a)	<u>B(a,b)</u>	Aturan 3 pada baris 9
(14).		A(a)	Tutup	Aturan 8 pada baris 10
(15).		<u>¬C(a,b)</u> Tutup		Aturan 8 pada baris 10

∴ terbukti

Dari kedua contoh tersebut terlihat rumitnya penggunaan aturan-aturan pembuktian dan juga pengembangan cabang yang dibentuk menjadi lebih banyak seperti terlihat pada contoh 7. Selain itu juga terlihat panjangnya langkah yang digunakan untuk melakukan pembuktian pada contoh 7 dan contoh 8, hanya saja pada contoh 8, terlihat pembentukan cabang hanya sedikit.

Hal ini disebabkan karena penggunaan aturan tidak memiliki pedoman tertentu, langkah manakah yang akan diambil terlebih dahulu. Pengambilan aturan untuk langkah pembuktian diserahkan sepenuhnya pada pihak yang membuktikan validitas argumen yang dikerjakannya. Agar pemakaian aturan menjadi lebih mudah dimengerti, maka diperlukan pedoman yang mengatur aturan manakah yang akan dipakai terlebih dahulu. Pedoman ini yang dinamakan heuristik.

4. HEURISTIK-HEURISTIK

Heuristik adalah aturan yang baik (*rule of thumb*) atau langkah yang sebaiknya diambil saat mengimplementasikan suatu metode, aturan ataupun cara, agar langkah-langkah yang dipergunakan untuk pembuktian menjadi lebih pendek dan mungkin menjadi lebih sederhana. Pada saat mengimplementasikan atau memilih aturan-aturan Tablo Semantik yang akan digunakan untuk pembuktian validitas argumen, sebaiknya mengikuti heuristik-heuristik berikut, agar langkah pembuktian menjadi lebih pendek dan pembuatan cabang menjadi lebih sederhana.

Heuristik ke-1 terdapat pada Tablo Semantik untuk Logika Proposisional (Kelly, hal 31) sebagai berikut:

Heuristik-1:
Pakailah aturan-aturan yang tanpa cabang sebelum aturan yang memiliki cabang

Heuristik-1 digunakan pada saat membuktikan validitas argumen di logika proposisional dan terbukti bermanfaat terutama pada saat mempergunakan aturan yang mengatur tanpa cabang, tepatnya sebenarnya hanya satu cabang. Jika sudah tidak bisa memakai aturan tanpa cabang, digunakan aturan dengan cabang, yang sebenarnya dua cabang.

Pemakaian Heuristik-1 ini juga sangat bermanfaat untuk mengurangi munculnya banyak cabang pada saat langkah-langkah pembuktian. Sewaktu membuktikan validitas berbagai soal argumen dengan Tablo Semantik di logika proposisional, ternyata pemilihan aturan-aturan yang akan digunakan menemukan satu langkah baik lagi atau aturan baik yang bisa mempercepat pembuktian validitas argumen yang dikerjakan. Aturan baik tersebut diberi nama Heuristik-2. Heuristik-2 tersebut adalah:

Heuristik-2: Pakailah aturan-aturan yang mengatur ekspresi logikanya pasti memiliki literal (wff) berpasangan dengan literal yang sudah ada, sehingga pasti terjadi inkonsistensi pada cabang tersebut

Kedua heuristik tersebut tidak harus berurutan pemakaiannya, tetapi boleh saja Heuristik-2 kemudian dilanjutkan Heuristik-1, atau bergantian dan boleh juga digunakan lebih dari satu kali, atau berturut-turut memakai salah satu heuristik

Berikut ini pembuktian validitas argumen dengan Tablo Semantik di logika proposisional, dicoba pada validitas argumen dengan Tablo Semantik di logika predikat.

5. IMPLEMENTASI HEURISTIK

Implementasi kedua Heuristik dilakukan pada dua contoh yang dikerjakan tanpa Heuristik pada bagian sebelumnya, yakni Contoh 7 dan Contoh 8 yang memiliki langkah pembuktian cukup banyak dan dengan cabang yang cukup banyak juga.

Pada contoh berikut, kedua Heuristik digunakan pada Contoh 7 dan diberi nama Contoh 7A. Langkah-langkahnya seperti berikut ini:

Contoh 7A:

Buktikan: $\vdash (\forall x)((A(x)\rightarrow(B(x)\rightarrow C(x)))\rightarrow((A(x)\rightarrow B(x))\rightarrow(A(x)\rightarrow C(x))))$

Bukti:

(1). $\neg(\forall x)((A(x)\rightarrow(B(x)\rightarrow C(x)))\rightarrow((A(x)\rightarrow B(x))\rightarrow(A(x)\rightarrow C(x))))$

(2). $(\exists x)\neg((A(x)\rightarrow(B(x)\rightarrow C(x)))\rightarrow((A(x)\rightarrow B(x))\rightarrow(A(x)\rightarrow C(x))))$ Aturan 12 pada baris 1

(3). $\neg((A(a)\rightarrow(B(a)\rightarrow C(a)))\rightarrow((A(a)\rightarrow B(a))\rightarrow(A(a)\rightarrow C(a))))$ Aturan 11 pada baris 2

(4). $A(a)\rightarrow(B(a)\rightarrow C(a))$ Aturan 8 pada baris 3

(5). $\neg((A(a)\rightarrow B(a))\rightarrow(A(a)\rightarrow C(a))))$ Aturan 8 pada baris 3

(6). $A(a)\rightarrow B(a)$ Aturan 8 pada baris 5

(7). $\neg(A(a)\rightarrow C(a))$ Aturan 8 pada baris 5

(8). $A(a)$ Aturan 8 pada baris 7

(9). $\neg C(a)$ Aturan 8 pada baris 7

(10). $\underline{\neg A(a)}$ $B(a)$ Aturan 3 pada baris 6

Tutup

(11). $\underline{\neg A(a)}$ $B(a)\rightarrow C(a)$ Aturan 3 pada baris 4

Tutup

(12). $\underline{\neg B(a)}$ $\underline{C(a)}$ Aturan 3 pada baris 11

Tutup Tutup

$\therefore$ terbukti

Penggunaan heuristik yang pertama kali adalah Heuristik-1 yang diimplementasikan pada baris 3, yang menghasilkan baris 4 dan 5. Heuristik berikut adalah Heuristik-2 yang digunakan pada baris 7 yang menghasilkan baris 8 dan 9, yang menghasilkan literal A(a) dan ¬C(a). Berikutnya Heuristik-2 yang dipakai pada baris 6, yang menghasilkan baris 10. Terdapat dua literal yang berpasangan, yakni A(a) dan ¬A(a) maka cabang tersebut ditutup. Cabang di kanan masih terbuka dan Heuristik-2 digunakan lagi pada baris 4 yang menghasilkan literal berpasangan kembali, yakni A(a) dan ¬A(a), dan cabang tersebut ditutup. Terakhir, baris 11 yang hanya menurunkan ke dua literal dan masing-masing memiliki pasangannya, yakni B(a) dengan ¬B(a) dan ¬C(a) dengan C(a) dan kedua cabang tersebut ditutup.

Terlihat pada contoh 7 yang dikerjakan dengan menggunakan dua heuristik, maka langkahnya menjadi lebih sedikit, yakni dari 14 langkah menjadi 12 langkah, sedangkan pada pembuatan cabang, menjadi lebih sedikit dan dengan lebih sedikit ekspresi logika yang diturunkan pada cabang-cabang tersebut. Hal ini terlihat pada Baris 10 sampai dengan 12 dimana masing-masing hanya memiliki satu ekspresi logika yang diturunkan dari baris-baris sebelumnya. Hal ini menunjukkan kesederhanaan tampilan pembuktian karena setiap cabang hanya menurunkan satu ekspresi logika.

Jadi memang terbukti bahwa kedua Heuristik tersebut memang mampu mengurangi langkah pembuktian dan mengurangi banyaknya cabang yang dibentuk dan membuat tampilan pembuktian menjadi lebih sederhana dan mudah diikuti. Untuk menambah keyakinan bahwa kedua heuristik tersebut memang mampu mengurangi langkah pembuktian, maka berikut ini penggunaan dua heuristik yang diimplementasikan pada contoh 8, yang diberi nama Contoh 8A berikut ini:

Contoh 8A:

Buktikan: $\vdash (\forall x)(\forall y)((A(x)\rightarrow(B(x,y)\rightarrow C(x,y)))\rightarrow((A(x)\rightarrow B(x,y))\rightarrow(A(x)\rightarrow C(x,y))))$

Bukti:

(1). $\neg(\forall x)(\forall y)((A(x)\rightarrow(B(x,y)\rightarrow C(x,y)))\rightarrow((A(x)\rightarrow B(x,y))\rightarrow(A(x)\rightarrow C(x,y))))$

(2). $(\exists x)(\exists y)\neg((A(x)\rightarrow(B(x,y)\rightarrow C(x,y)))\rightarrow((A(x)\rightarrow B(x,y))\rightarrow(A(x)\rightarrow C(x,y))))$ Aturan 12 pada baris 1

(3). $\neg((A(a)\rightarrow(B(a,b)\rightarrow C(a,b)))\rightarrow((A(a)\rightarrow B(a,b))\rightarrow(A(a)\rightarrow C(a,b))))$ Aturan 11 pada baris 2

(4). $A(a)\rightarrow(B(a,b)\rightarrow C(a,b))$ Aturan 8 pada baris 3

(5). $\neg((A(a)\rightarrow B(a,b))\rightarrow(A(a)\rightarrow C(a,b)))$ Aturan 8 pada baris 3

(6). $A(a)\rightarrow B(a,b)$ Aturan 8 pada baris 5

(7). $\neg(A(a)\rightarrow C(a,b))$ Aturan 8 pada aris 5

(8). $A(a)$ Aturan 8 pada baris 7

(9). $\neg C(a,b)$ Aturan 8 pada baris 7

(10). <u>¬A(a)</u> B(a,b) Aturan 3 pada baris 6

Tutup

(11). <u>¬A(a)</u> B(a,b)→C(a,b) Aturan 3 pada baris 4

Tutup

(12). ¬B(a,b) C(a,b) Aturan 3 pada baris 11

Tutup Tutup

∴ terbukti

Pada Contoh 8A, pertama kali Heuristik-1 digunakan pada baris 3 yang menghasilkan baris 4 dan 5 dan heuristik yang sama juga dipakai pada baris 5 yang menghasilkan baris 6 dan 7, heuristik yang sama lagi dipakai pada baris 7 yang menghasilkan baris 8 dan 9 yang masing-masing berisi literal A(a) dan ¬C(a,b). Heuristik-2 dipakai untuk menurunkan baris 6 yang menghasilkan literal berpasangan, yakni A(a) dengan ¬A(a) dan terjadi inkonsistensi maka cabang ditutup. Langkah berikut memakai Heuristik-2 untuk menurunkan baris 3 dan menghasilkan literal berpasangan, yakni A(a) dengan ¬A(a) dan cabang ditutup karena inkonsistensi. Langkah terakhir adalah menurunkan baris 11 yang cabang ke kiri menghasilkan literal berpasangan, yakni B(a,b) dengan ¬B(a,b) dan cabang ke kanan menghasilkan literal berpasangan, yakni ¬C(a,b) dengan C(a,b), sehingga ke dua cabang tersebut ditutup. Karena keduanya menghasilkan inkonsistensi, maka semua cabang ditutup, dengan demikian argumen terbukti *valid*.

Dari tampilan urutan-urutan langkah pembuktian yang ada, maka ternyata langkah pembuktian menjadi lebih pendek, yakni dari 15 langkah menjadi 12 langkah. Namun, cabang yang dibentuk ternyata menjadi lebih banyak, hanya saja bentuknya menjadi jauh lebih sederhana karena lebih sedikit ekspresi logika yang diturunkan pada setiap cabang yang dibentuk.

6. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh dari hasil dan pembahasan adalah heuristik-heuristik tersebut ternyata mampu mengurangi langkah-langkah pemilihan aturan untuk pembuktian sehingga langkah pembuktian validitas argumen menjadi lebih pendek. Heuristik juga diharapkan mampu mengurangi pembentukan cabang, tetapi ternyata tidak selalu cabang yang dibentuk menjadi lebih sedikit karena tergantung dari persoalannya. Ekspresi logika yang diturunkan dengan aturan-aturannya, menjadi tampak lebih sederhana bentuk tampilannya sehingga lebih mudah diikuti dan dimengerti.

REFERENSI

[1]. Burke, Edmund and Foxley, Eric. 1996. *Logic and Its Application*. 1st Published, Prentice Hall Europe

[2]. Copi, Irving M. And Cohen, Carl. 2009. *Introduction to Logic, 13th Edition*, New Jersey: Pearson Prentice Hall

[3]. Enderton, Herbert B., 2001, *A Mathematical Introduction to Logic*. San Diego: A Harcourt Science and Technology Co

[4]. Huth, Michael and Ryan, Mark. 2004. *Logic in Computer Science, 2nd Edition*, Cambridge: Cambridge University Press

[5]. Hurley, Patrik J. 2015. *A Concise Introduction to Logic, 12th Edition*. Cengage Learning

[6]. Kelly, John J. 1997. *The Essence of Logic*. 1st Published, Prentice Hall Europe

[7]. Lemmon E.J. 1965. *Beginning Logic*. Hongkong: Van Nostrand Reinhold Co Ltd

[8]. Restall, Greg. 2006. *Logic-An Introduction, 1st Published*. New York: Routledge 2 Park Square