PERBANDINGAN PENDEKATAN *SEPARABLE PROGRAMMING* DENGAN *THE KUHN-TUCKER CONDITIONS* DALAM PEMECAHAN MASALAH *NONLINEAR*

Budi Marpaung

Fakultas Teknik dan Ilmu Komputer Jurusan Teknik Industri
Universitas Kristen Krida Wacana - Jakarta
budi.marpaung@ukrida.ac.id

Abstrak

Pemrograman terpisah adalah pendekatan yang digunakan untuk memecahkan masalah nonlinier dengan Metode Simplex. Metode ini terbukti dalam memecahkan masalah nonlinier, yang sampai sekarang tidak memiliki metode seperti dalam masalah pemrograman linier standar. Tulisan ini mencoba membandingkan proses dan hasil dari pendekatan Pemrograman terpisah dengan Kondisi Kuhn-Tucker. Terbukti bahwa keduanya memberikan hasil yang serupa, tetapi dengan cara yang berbeda. Pendekatan Pemrograman terpisah sebaiknya digunakan untuk memecahkan masalah nonlinier yang memiliki kesulitan ketika diselesaikan dengan Pendekatan Kondisi Kuhn-Tucker.

Kata Kunci: pemrograman terpisah, kondisi Kuhn-Tucker, pemrograman nonlinier, titik *grid*, cembung, cekung, kriteria, formulasi, optimal

Abstract

Separable Programming is the approach used to solve nonlinier problems with the Simplex Method. This method is proven to solve nonlinier problem, which until now has no way like the standard linear programming problems. This paper tries to compare the process and results of Separable Programming approach to the Kuhn-Tucker Condition. Proved that both give similar result, but in a different way. Separable Programming Approach should be used to solve nonlinear problems who have difficulty when solved by the Kuhn-Tucker Conditions Approach.

Keywords: *separable programming, the Kuhn-Tucker Conditions, nonlinier programming, grid point, convex, concave, criteria, formulation, optimal*

1. PENDAHULUAN

1.1 Latar Belakang Masalah

Hingga saat ini masalah dalam bentuk model nonlinier belum dapat dipecahkan dengan satu metode standar. Setiap model masalah nonlinier memiliki teknik penyelesaian tersendiri. Situasi ini sangat berbeda dengan program linier yang telah memiliki satu metode penyelesaian yang paling ampuh, yaitu Metode Simplex, yang dikembangkan oleh G.B. Dantzig. Karena keampuhan Metode Simplex dalam menyelesaikan masalah nonlinier, maka C.E. Miller pada tahun 1963 mengembangkan *Separable Programming*.

Pada prinsipnya *Separable Programming* merupakan metode yang melakukan konversi masalah model nonlinier menjadi model linier. Dalam hal ini masalah model nonlinier diubah menjadi model linier, untuk kemudian dipecahkan dengan Metode

Simplex. Solusi *Separable Programming* merupakan solusi yang bersifat taksiran *(aproximation)*, namun nilainya mendekati nilai optimal yang sesungguhnya bahkan pada kasus tertentu nilai optimal dengan pendekatan *Separable Programming* persis sama dengan nilai optimal sesungguhnya bila menggunakan metode dengan pendekatan model nonlinier.

Penelitian ini mencoba menyelesaikan sebuah masalah nonlinier dengan pendekatan *Separable Programming* dan pendekatan *The Kuhn-Tucker Conditions*. Kedua metode dibandingkan dalam aspek hasil dan prosesnya. Untuk memudahkan proses pencarian solusi optimal pada *Separable Programming* digunakan *software* Win QSB+.

1.2 Perumusan Masalah

Pokok permasalahan yang dibahas dalam tulisan ini adalah memformulasikan sebuah masalah nonlinier dalam bentuk *Separable Programming*, menemukan solusi optimalnya, dan membandingkan hasilnya dengan pendekatan *The Kuhn-Tucker Conditions*.

1.3 Tujuan dan Manfaat Penelitian

Tujuan penelitian ini adalah untuk menemukan formulasi matematis *problem* nonlinier yang dipecahkan dengan pendekatan *Separable Progamming* dan pendekatan *The Kondisi Kuhn-Tucker Conditions*, yang kemudian dibandingkan proses dan hasilnya. Penelitian ini diharapkan dapat menjadi pertimbangan dalam menentukan metode yang dipilih dalam memecahkan masalah nonlinier.

1.4 Pembatasan Masalah

Masalah yang dibahas dalam penelitian ini hanya pada masalah minimisasi dalam tiga variabel dan tiga kendala, di luar kendala nonnegativitas.

2. PEMECAHAN MASALAH NONLINEAR

2.1 *Separable Programming*

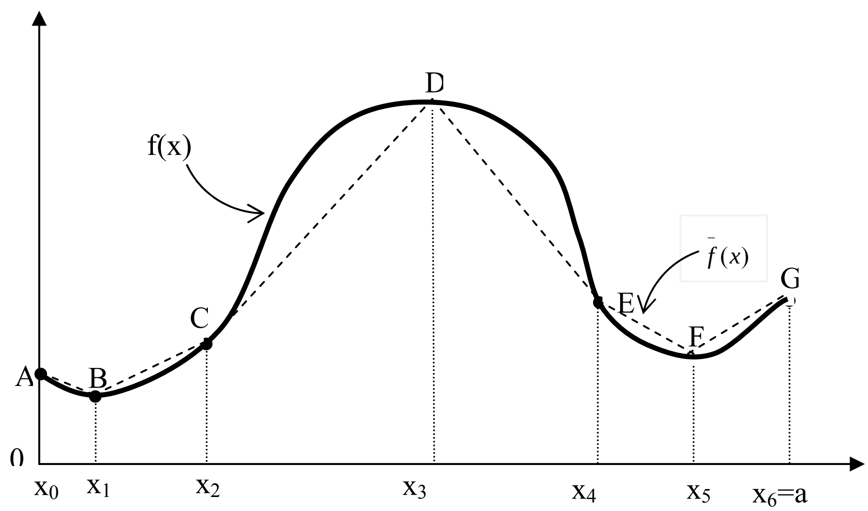
Hingga saat ini masalah dalam bentuk model nonlinier dipecahkan dalam beberapa cara, diantaranya *Fibonacci and Golden Section Search, The Hooke and Jeeves Search Algorithm, Differensial/Taylor Series, Lagrange Multiplier, Constrained Derivatives, Projected Gradient Method, The Kuhn-Tucker Conditions, Quadratic Programming, Complementary Pivot Algorithm,* dan sejumlah metode lainnya. Berbagai metode tersebut memiliki prinsip yang berbeda dan cocok digunakan untuk model masalah tertentu. Situasi ini berbeda dengan program linier yang telah memiliki satu metode penyelesaian yang paling ampuh, yaitu Metode Simplex. Walaupun kemudian muncul beberapa teknik penyelesaian dalam berbagai masalah model linier, seperti Metode *Big*-M, Metode Dua *Phase*, Metode *Dual Simplex,* Metode *Revised Simplex*, Metode *Konig*, Metode *Branch & Bound*, Metode *Cutting Plane*, Algoritma Partisi, dan lainnya, namun semua metode itu pada dasarnya masih menggunakan prinsip Metode Simplex.

Separable Programming adalah metode pemecahan masalah yang mengkonversi masalah nonlinier menjadi model linier, untuk kemudian dipecahkan dengan Metode Simplex. Dalam *Separable Programming*, masalah program nonlinier dipecahkan melalui penaksiran *(aproximating)* fungsi nonlinier menjadi fungsi linier yang menjadi pasangannya, yang kemudian dipecahkan dengan Metode Simplex [1]. Asumsi dasar dalam *Separable Programming* adalah semua fungsi dinyatakan dalam bentuk terpisah.

Sebuah fungsi dapat dinyatakan sebagai fungsi *separable* bila fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam bentuk penjumlahan fungsi masing-masing variabel, atau secara matematik dinyatakan sebagai:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \quad \text{.......(1)}$$

Misalkan sebuah fungsi kontinu f(x) dari satu variabel tunggal x, yang terdefinisi untuk semua x dalam interval $0 \le x \le a$. Fungsi tersebut dapat dinyatakan dalam Gambar 1. Misalkan ditetapkan sebuah titik (selanjutnya dapat disebut *grid point*) yang berada dalam nilai interval x. Selanjutnya untuk setiap x_k nilai fungsi $f(x_k)$ dan menghubungkan titik (x_k, f_k) dan (x_{k+1}, f_{k+1}), maka akan terbentuk fungsi penaksiran $\bar{f}(x)$, yang merupakan fungsi linier. Dari Gambar 1 terlihat bahwa fungsi penaksiran pada interval tertentu memiliki jarak dari fungsi awal, namun sangat dekat (bahkan menempel) pada fungsi awalnya. Fungsi penaksiran akan semakin dekat dengan fungsi awal bila jumlah *grid point* diperbanyak [1].



Gambar 1. Penaksiran fungsi nonlinier

Fungsi penaksiran $\bar{f}(x)$ dapat dinyatakan secara analitik. Berdasarkan pada Gambar 1 terlihat bahwa dalam interval $x_k \le x \le x_{k+1}$, fungsi f(x) ditaksir dengan $\bar{f}(x)$, yaitu:

$$\bar{f}(x) = f_k + \frac{f_{k+1} - f_k}{x_{k+1} - x_k}(x - x_k) \quad \text{.......(2)}$$

Jika x terletak di antara $x_k \le x \le x_{k+1}$, maka dapat dinyatakan dengan:

$$x = \lambda x_{k+1} + (1-\lambda)x_k \quad \text{.......(3)}$$

untuk semua λ, $0 \le \lambda \le 1$.
Dari persamaan (3), maka diperoleh:

$$x - x_k = \lambda\,(x_{k+1} - x_k) = \lambda(x_{k+1} - x_k) \quad \text{.......(4)}$$

Bila persamaan (4) disubstitusi ke persamaan (2), maka diperoleh:

$$\bar{f}(x) = \lambda f_k + (1-\lambda) f_k \quad \text{.......(5)}$$

Misalkan $\lambda = \lambda_{k+1}$ dan 1- $\lambda = \lambda_k$, maka untuk $x_k \leq x \leq x_{k+1}$, ada nilai λ_k dan λ_{k+1} yang unik, sehingga:

$$x = \lambda_k x_k + \lambda_{k+1} x_{k+1} \quad \text{.......(6)}$$

$$\bar{f}(x) = \lambda f_k + \lambda_{k+1} f_{k+1} \quad \text{.......(7)}$$

$$\lambda_k + \lambda_{k+1} = 1 \quad \text{.......(8)}$$

dimana $\lambda_k \geq 0$; $\lambda_{k+1} \geq 0$

Dengan uraian di atas, untuk setiap nilai x, $0 \leq x \leq a$, maka dapat dituliskan:

$$x = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k x_k \quad \text{.......(9)}$$

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=0}^{r} \lambda_k f_k \quad \text{.......(10)}$$

dimana $\sum_{k=0}^{r} \lambda_k = 1$; $\lambda_k \geq 0$, k = 0, ..., r ....(11)

Nilai r merupakan bilangan bulat yang menyatakan jumlah segmen yang terbentuk atas pembagian domain x.

Dengan mengikuti proses di atas, maka model *Separable Programming* dapat dinyatakan sebagai berikut [2].

$$\text{Min./Maks.} \quad Z = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j \quad \text{.......(12)}$$

$$\text{d.k/s.t.} \quad \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} g_{ij} \leq 0 \; dan/atau \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} g_{ij} \geq 0 \text{ untuk semua i} \quad \text{.......(13)}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_k = 1 \text{ untuk semua k} \quad \text{.......(14)}$$

$$x_j \geq 0 \text{ untuk semua j} \quad \text{.......(15)}$$

Namun untuk mendapatkan solusi optimal dengan pendekatan Metode Simplex pada masalah dalam bentuk *Separable Programming* harus memenuhi dua hal. Pertama, jika *Separable Programming* adalah masalah maksimisasi maka setiap $f_j(x_j)$ harus *concave* dan setiap $g_{ij}(x_j)$ adalah *convex*. Kedua, bila *Separable Programming* adalah masalah minimisasi, setiap $f_j(x_j)$ adalah *convex* dan setiap $g_{ij}(x_j)$ adalah *convex*.

2.2 *The Kuhn-Tucker Condition*

The Kuhn-Tucker Condition merupakan teori yang dikembangkan untuk menyelesaikan masalah model nonlinier secara umum. Terdapat empat model/program Kondisi Kuhn-Tucker. Salah satu diantaranya memiliki bentuk sebagai berikut [1].

$$\text{Min } f(x) \quad \text{.......(16)}$$

$$\text{d.k. } g_i(x) \geq 0 \text{ untuk } i = 1, 2, 3, \text{.........}, m \quad \text{.......(17)}$$

$$x \geq 0 \quad \text{.......(18)}$$

Terdapat enam syarat yang harus dipenuhi untuk masalah model seperti bentuk di atas, yaitu:

1) $x_j \geq 0$ untuk j = 1,2, ..., n ....(19)

2) $x_j \left[\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \right] = 0$ ....(20)

3) $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x_j} - \sum_{i=1}^{m} \mu_i \dfrac{\partial g_i(x)}{\partial x_j} \geq 0$ untuk j = 1,2, ..., n ....(21)

4) $u_i \geq 0$, untuk i = 1,2, ..., m ....(22)

5) $u_i g_i(x) = 0$ untuk i = 1, 2,3,........, m ....(23)

6) $g_i(x) \geq 0$ ....(24)

Untuk mendapatkan solusi optimal dilakukan dengan pemeriksaan terhadap keenam syarat di atas. Dari beberapa solusi yang diperoleh, maka solusi optimal adalah solusi yang memberikan nilai paling optimal dari semua alternatif yang memenuhi syarat [3].

3. STUDI KASUS PENETAPAN JUMLAH PRODUKSI OPTIMAL

3.1 Gambaran Umum

Sebuah perusahaan yang memproduksi peralatan elektronik mendapat kontrak untuk menyediakan televisi 50 unit pada akhir bulan pertama, 100 unit pada akhir bulan kedua, dan 150 unit pada akhir bulan ketiga. Biaya produksi x unit televisi sebesar x^2. Perusahaan dapat memproduksi lebih dari kebutuhan pada suatu bulan, dengan konsekuensi akan menimbulkan biaya persediaan sebesar 50 satuan harga dari barang yang diproduksi bulan lalu ke bulan berikutnya. Bila di awal bulan tidak ada persediaan, tentukan jumlah produksi tiap bulan agar biaya total menjadi minimum.

3.2 Formulasi

Pada tahap formulasi maka masalah di atas diubah dalam bentuk *Nonlinier Programming*. Terdapat tiga tahapan dalam formulasi, dengan uraian sebagai berikut:

Langkah I : Identifikasi variabel keputusan. Hal yang akan dilakukan adalah menentukan jumlah unit produksi pada bulan pertama, kedua, dan ketiga, dinyatakan dalam simbol aljabar, sebagai berikut:

x_1 – jumlah unit produksi pada bulan pertama
x_2 – jumlah unit produksi pada bulan kedua
x_3 – jumlah unit produksi pada bulan ketiga

Langkah II : Identifikasi semua kendala dalam masalah. Untuk masalah ini kendala adalah bagaimana memenuhi pesanan sesuai jumlah kontrak setiap bulan, yaitu:

$$\begin{aligned} x_1 \quad\quad\quad &\geq 50 \\ x_2 \quad\; &\geq 100 \\ x_3 &\geq 150 \end{aligned}$$

Langkah III : Identifikasi sasaran atau kriteria. Sasaran dalam masalah ini adalah mengusahakan agar biaya total menjadi minimum. Dalam hal ini biaya yang timbul adalah biaya produksi ditambah biaya penyimpanan barang, sehingga dinyatakan dengan persamaan matematis:

$$\text{Min} \quad Z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 50(x_1 - 50) + 50(x_1 + x_2 - 50 - 100)$$

Masalah di atas secara lengkap dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & Z = x_1^2 + 100x_1 + x_2^2 + 50x_2 + x_3^2 - 10.000 \\ \text{d.k.} \quad & x_1 \geq 50 \\ & x_2 \geq 100 \\ & x_3 \geq 150 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

3.3 Solusi *Separable Programming*

Solusi *Separable Programming* diawali dengan proses konversi model program nonlinier menjadi model program linier. Banyaknya *grid point* dapat ditentukan secara sembarang, namun semakin banyak *grid point* semakin baik fungsi yang dibentuk dapat menaksir fungsi awal. Dalam masalah ini ditetapkan jumlah *grid point* sebanyak enam, sehingga diperoleh nilai fungsi untuk setiap *grid point* dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1. Nilai fungsi pada *grid point*

K	1	2	3	4	5	6
x_{k1}	50	80	110	140	170	200
$f_{k1} = x_1^2 + 100x_1$	7500	14400	23100	33600	45900	60000
$g_{1k1} = x_1$	50	80	110	140	170	200
$g_{2k1} = x_2$	0	0	0	0	0	0
$g_{3k1} = x_3$	0	0	0	0	0	0
x_{k2}	100	120	140	160	180	200
$f_{k2} = x_2^2 + 50x_2$	15000	20400	26600	33600	41400	50000
$g_{1k2} = x_1$	0	0	0	0	0	0
$g_{2k2} = x_2$	100	120	140	160	180	200
$g_{3k2} = x_3$	0	0	0	0	0	0
x_{k2}	150	160	170	180	190	200
$f_{k3} = x_3^2 - 10000$	12500	15600	18900	22400	26100	30000
$g_{1k3} = x_1$	0	0	0	0	0	0
$g_{2k3} = x_2$	0	0	0	0	0	0
$g_{3k3} = x_3$	150	160	170	180	190	200

Dengan bantuan Tabel 1, maka problem nonlinier dapat dikonversi menjadi problem linier sebagai berikut.

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad \bar{Z} = \; & 7500\lambda_{11} + 14.400\lambda_{21} + 23.100\lambda_{31} + 33.600\lambda_{41} + 45.900\lambda_{51} + 60.000\lambda_{61} \\ & + 15.000\lambda_{12} + 20.400\lambda_{22} + 26.600\lambda_{32} + 33.600\lambda_{42} + 41400\lambda_{52} + 50.000\lambda_{62} \\ & + 12.500\lambda_{13} + 15.600\lambda_{23} + 18.900\lambda_{33} + 12.400\lambda_{43} + 26.100\lambda_{53} + 30.000\lambda_{63} \end{aligned}$$

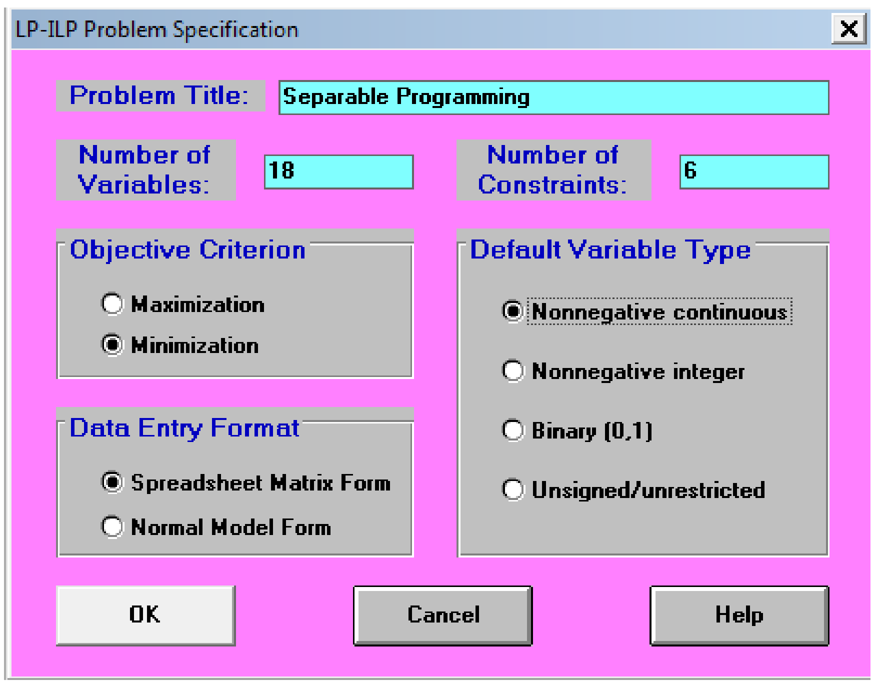
$$\begin{aligned} \text{d.k.} \quad & 50\lambda_{11} + 80\lambda_{21} + 110\lambda_{31} + 140\lambda_{41} + 170\lambda_{51} + 200\lambda_{61} \\ & + 0\lambda_{12} + 0\lambda_{22} + 0\lambda_{32} + 0\lambda_{42} + 0\lambda_{52} + 0\lambda_{62} \\ & + 0\lambda_{13} + 0\lambda_{23} + 0\lambda_{33} + 0\lambda_{43} + 0\lambda_{53} + 0\lambda_{63} \quad \geq \; 50 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& 0\lambda_{11} + 0\lambda_{21} + 0\lambda_{31} + 0\lambda_{41} + 0\lambda_{51} + 0\lambda_{61} \\
& + 100\lambda_{12} + 120\lambda_{22} + 140\lambda_{32} + 160\lambda_{42} + 1800\lambda_{52} + 200\lambda_{62} \\
& + 0\lambda_{13} + 0\lambda_{23} + 0\lambda_{33} + 0\lambda_{43} + 0\lambda_{53} + 0\lambda_{63} \geq 100 \\
& 0\lambda_{11} + 0\lambda_{21} + 0\lambda_{31} + 0\lambda_{41} + 0\lambda_{51} + 0\lambda_{61} \\
& + 150\lambda_{12} + 160\lambda_{22} + 170\lambda_{32} + 180\lambda_{42} + 190\lambda_{52} + 200\lambda_{62} \\
& + 0\lambda_{13} + 0\lambda_{23} + 0\lambda_{33} + 0\lambda_{43} + 0\lambda_{53} + 0\lambda_{63} \geq 150
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& \lambda_{11} + \lambda_{21} + \lambda_{31} + \lambda_{41} + \lambda_{51} + \lambda_{61} = 1 \\
& \lambda_{12} + \lambda_{22} + \lambda_{32} + \lambda_{42} + \lambda_{52} + \lambda_{62} = 1 \\
& \lambda_{13} + \lambda_{23} + \lambda_{33} + \lambda_{43} + \lambda_{53} + \lambda_{63} = 1 \\
& x_{kj} \geq 0 \text{ untuk } k = 1, 2, 3, 4, 5, \text{ dan } 6;\ j = 1, 2, \text{ dan } 3.
\end{aligned}
$$

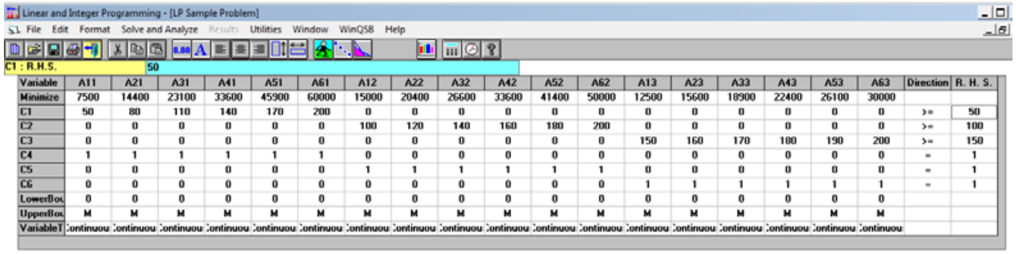
Masalah model nonlinier yang sebelumnya memiliki tiga variabel dan tiga kendala telah berubah menjadi model linier dengan 18 variabel dan 6 kendala. Dengan demikian Metode Simplex dapat digunakan untuk memecahkan masalah ini. Untuk memudahkan perhitungan maka digunakan *Software Win QSB+*, sebagai berikut.

1) *Input* Nama *Problem*, Jumlah Variabel, Kendala, dan Jenis Masalah



Gambar 2. *Input* nama masalah, jumlah variabel, kendala, dan jenis masalah pada Win QSB

2) *Input Data Problem*



Linear and Integer Programming - [LP Sample Problem]

File Edit Format Solve and Analyze Results Utilities Window WinQSB Help

C1 : R.H.S. 50

Variable	A11	A21	A31	A41	A51	A61	A12	A22	A32	A42	A52	A62	A13	A23	A33	A43	A53	A63	Direction	R. H. S.
Minimize	7500	14400	23100	33600	45900	60000	15000	20400	26600	33600	41400	50000	12500	15600	18900	22400	26100	30000		
C1	50	80	110	140	170	200	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	>=	50
C2	0	0	0	0	0	0	100	120	140	160	180	200	0	0	0	0	0	0	>=	100
C3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	150	160	170	180	190	200	>=	150
C4	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	=	1
C5	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	=	1
C6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	=	1
LowerBou	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0		
UpperBou	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M	M		
VariableT	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou	Continuou		

Gambar 3. *Input data problem* pada Win QSB+

3) Solusi

	22:34:11		Thursday	April	12	2012		
	Decision Variable	Solution Value	Unit Cost or Profit c(j)	Total Contribution	Reduced Cost	Basis Status	Allowable Min. c(j)	Allowable Max. c(j)
1	A11	1,0000	7.500,0000	7.500,0000	0	basic	5.700,0000	14.400,0000
2	A21	0	14.400,0000	0	0	basic	7.500,0000	15.300,0000
3	A31	0	23.100,0000	0	1.800,0000	at bound	21.300,0000	M
4	A41	0	33.600,0000	0	5.400,0000	at bound	28.200,0000	M
5	A51	0	45.900,0000	0	10.800,0000	at bound	35.100,0000	M
6	A61	0	60.000,0000	0	30.000,0000	at bound	30.000,0000	M
7	A12	1,0000	15.000,0000	15.000,0000	0	basic	14.200,0000	20.000,0000
8	A22	0	20.400,0000	0	0	basic	15.000,0000	20.800,0000
9	A32	0	26.600,0000	0	800,0000	at bound	25.800,0000	M
10	A42	0	33.600,0000	0	2.400,0000	at bound	31.200,0000	M
11	A52	0	41.400,0000	0	4.800,0000	at bound	36.600,0000	M
12	A62	0	500.000,0000	0	458.000,0000	at bound	42.000,0000	M
13	A13	1,0000	12.500,0000	12.500,0000	0	basic	12.300,0000	15.600,0000
14	A23	0	15.600,0000	0	0	basic	12.500,0000	15.700,0000
15	A33	0	18.900,0000	0	200,0000	at bound	18.700,0000	M
16	A43	0	22.400,0000	0	600,0000	at bound	21.800,0000	M
17	A53	0	26.100,0000	0	1.200,0000	at bound	24.900,0000	M
18	A63	0	30.000,0000	0	2.000,0000	at bound	28.000,0000	M
	Objective	Function	(Min.) =	35.000,0000				
	Constraint	Left Hand Side	Direction	Right Hand Side	Slack or Surplus	Shadow Price	Allowable Min. RHS	Allowable Max. RHS
1	C1	50,0000	>=	50,0000	0	230,0000	50,0000	80,0000
2	C2	100,0000	>=	100,0000	0	270,0000	100,0000	120,0000
3	C3	150,0000	>=	150,0000	0	310,0000	150,0000	160,0000
4	C4	1,0000	=	1,0000	0	-4.000,0000	0,6250	1,0000
5	C5	1,0000	=	1,0000	0	-12.000,0000	0,8333	1,0000
6	C6	1,0000	=	1,0000	0	-34.000,0000	0,9375	1,0000

Gambar 4. Solusi optimal pada Win QSB+

3.4 Analisis Hasil Win QSB

Hasil perhitungan dengan menggunakan Win QSB+ pada Gambar 4 di atas digunakan untuk mendapatkan nilai x_1, x_2 dan x_3, dengan menggunakan rumus (9), sehingga diperoleh:

$$x_1 = x_{11}\lambda_{11} + x_{21}\lambda_{21} + x_{31}\lambda_{31} + x_{41}\lambda_{41} + x_{51}\lambda_{51} + x_{61}\lambda_{61}$$
$$= (50)(1) + (80)(0) + (110)(0) + (140)(0) + (170)(0) + (200)(0) = 50$$

$x_2 = x_{12}\lambda_{12} + x_{22}\lambda_{22} + x_{32}\lambda_{32} + x_{42}\lambda_{42} + x_{52}\lambda_{52} + x_{62}\lambda_{62}$
$= (100)(1) + (120)(0) + (140)(0) + (160)(0) + (180)(0) + (200)(0) = 100$

$x_3 = x_{13}\lambda_{13} + x_{23}\lambda_{23} + x_{33}\lambda_{33} + x_{43}\lambda_{43} + x_{53}\lambda_{53} + x_{63}\lambda_{63}$
$= (150)(1) + (160)(0) + (170)(0) + (180)(0) + (190)(0) + (200)(0) = 150$

Min $Z = (50)^2 + 100(50) + (100)^2 + 50(100) + (150)^2 - 10.000 = 35.000$

Dengan demikian, melalui Pendekatan *Separable Programming* diperoleh bahwa jumlah produksi bulan pertama sebesar 50 unit, bulan kedua 100 unit, dan bulan ketiga 150 unit sedangkan total biaya minimum yang diperoleh sebesar 35.000.

3.5 Solusi *The Kuhn-Tucker Conditions*

Solusi pendekatan *The Kuhn-Tucker Condition* diperoleh sesuai persyaratan yang harus dipenuhi sebagai berikut.

1) $x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0$
2) $x_1(2x_1 + 100 – u_1) = 0$
3) $x_2(2x_2 + 50 – u_2) = 0$
4) $x_3(2x_3 – u_3) = 0$
5) $2x_1 + 100 – u_1(1) – u_2(0) – u_3(0) = 0$, atau $2x_1 + 100 – u_1 = 0$
   $2x_2 + 50 – u_1(0) – u_2(1) – u_3(0) = 0$, atau $2x_2 + 50 – u_2 = 0$
   $2x_3 + \quad – u_1(0) – u_2(0) – u_3(1) = 0$, atau $2x_3 + 100 – u_3 = 0$
6) $u_1 \geq 0; u_2 \geq 0; u_3 \geq 0$
7) $u_1(x_1 – 50) = 0$
8) $u_2(x_2 – 100) = 0$
9) $u_3(x_3 – 150) = 0$
10) $x_1 \geq 50; x_2 \geq 100; x_3 \geq 100$

Solusi yang memenuhi keenam syarat di atas adalah $x_1 = 50$; $x_2 = 100$; dan $x_3 = 150$; dan $Z = 35.000$.

4. KESIMPULAN

Dari hasil pembahasan di atas diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

- Pendekatan *Separable Programming* dan *The Kuhn-Tucker Conditions* memberikan solusi optimal yang sama, yaitu jumlah produksi bulan pertama 50 unit, bulan kedua 100 unit, dan bulan ketiga 150 unit, dengan total biaya minimum 35.000.
- Untuk masalah yang sulit dipecahkan dengan *The Kuhn-Tucker Conditions* sebaiknya menggunakan pendekatan *Separable Programming*.
- Hasil *Separable Programming* akan semakin membaik bila jumlah *grid point* ditambah. Namun penambahan *grid point* akan menambah jumlah variabel, yang tentu semakin menyulitkan dalam mendapatkan solusi optimal.

REFERENSI

[1]. Don T. Philips, et.al., "*Operation Research: Principle and Practice*", 2nd edition, John Wiley and Sons, 1987.
[2]. Beale, E.M.L, P.J Coen, and A.D. J. Flowerdew, "*Separable Programming Applied to an Ore Purchasing Problem*," Journal of Applied Statistics, 1965.
[3]. Hillier and Lieberman, "*Introduction to Mathematical Programming*", 1st edition, McGraw-Hill, 1991.